

HEINRICH-HERTZ-INSTITUT FÜR SCHWINGUNGSFORSCHUNG
BERLIN-CHARLOTTENBURG

Technischer Bericht Nr. 92

Über die Beanspruchung von dünnen Kreisbogenstäben
bei Biegeschwingungen in ihrer Ebene

von

Dipl.-Ing. Christian Klarhoefer



B e r l i n

1 9 6 8

Über die Beanspruchung von dünnen Kreisbogenstäben bei

Biegeschwingungen in ihrer Ebene



Zusammenfassung:

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit kreisbogenförmig gekrümmten, schlanken Stäben von konstantem und zur Kreisebene symmetrischem Querschnitt, die Biegeschwingungen in der Kreisebene ausführen. Hierbei soll festgestellt werden, an welchen Stellen solcher Stäbe Dauerbrüche auftreten können, wenn sie durch eine harmonische Bewegung ihrer Enden zu erzwungenen Schwingungen angeregt werden. Den Untersuchungen liegt die einfache Biegetheorie unter Vernachlässigung von Achsdehnung, Schubverformung und Rotationsträgheit zugrunde.

Im ersten Teil der Arbeit werden die Differentialgleichung für die Schwingungsform und deren Lösungsfunktionen angegeben.

Im Hauptteil werden einige allgemeine Sätze über die Verteilung der kinetischen Biegebeanspruchung längs der Stabachse formuliert und bewiesen. Als Beispiel dazu wird bei Stäben mit einem freien Ende für unterschiedliche Anregungsfälle die Stelle der höchsten Beanspruchung numerisch berechnet und für verschiedene Öffnungswinkel als Funktion der Anregungsfrequenz in einer Reihe von Diagrammen aufgetragen.

Im 3. Teil wird anhand von durchgerechneten Beispielen überprüft, inwieweit sich die bisher vernachlässigten Nebeneinflüsse auf die Lage der höchsten Beanspruchung auswirken.

Zur Überprüfung der numerischen Ergebnisse des Hauptteils wurden auch Versuche durchgeführt, über die zum Schluß berichtet wird. An einseitig eingespannten Versuchsstäben mit verschiedenen Öffnungswinkeln wurden experimentell Dauerbrüche erzeugt. Die Bruchstellen stimmten befriedigend mit den berechneten Stellen der höchsten Beanspruchung überein.

Heinrich-Hertz-Institut für Schwingungsforschung
Berlin-Charlottenburg

Der Bearbeiter

Klarhoefer

(Dipl.-Ing. Christian Klarhoefer)

Der Abteilungsleiter

P. Matthieu

(Prof. Dr. phil. P. Matthieu)

Der Institutsdirektor

F. W. Gundlach

(Prof. Dr.-Ing. F. W. Gundlach)

Berlin-Charlottenburg, den 14. März 1968

Inhaltsübersicht

Literaturverzeichnis	3
Abkürzungsverzeichnis	5
1. Einleitung und Aufgabenstellung	7
2. Theoretische Grundlagen	9
2.1 Voraussetzungen	9
2.2. Herleitung der Differentialgleichung für die Schwingungsform	9
2.3 Beschränkung auf sehr schlanke Stäbe und relativ niedrige Frequenzen	16
3. Untersuchung der kinetischen Biegebeanspruchung	29
3.1 Allgemeines	29
3.2 Aussagen über die Verteilung der Biegespannung längs der Stabachse bei harmonischer Bewegung der Stabenden	32
3.3 Beweis zu Satz 1	36
3.4 Beweis der Sätze 2 bis 6	36
3.5 Beanspruchungsfunktionen einseitig freier Stäbe	53
3.6 Beweis zu Satz 8	57
3.7 Beweis zu Satz 7	61
3.8 Beweis zu Satz 9	67
3.9 Untersuchungen zu Satz 10	67
3.10 Beweis zu Satz 11	77
4. Abgrenzung des Gültigkeitsbereiches der einfachen Biegetheorie	119
4.1. Wurzeln der charakteristischen Gleichung	119
4.2 Berechnung der Beanspruchung	121
4.3 Diskussion der berechneten Beispiele	124
5. Experimenteller Teil	136
5.1 Versuchseinrichtung	136
5.2 Werkstoffe der Versuchsstäbe	137
5.3 Durchführung der Versuche	137

Literaturverzeichnis

- [1] R. Hoppe Vibrationen eines Ringes in seiner Ebene
Journ.f. reine und angew. Mathematik 73 (1871), S. 158-170
- [2] Lord Rayleigh Theorie des Schalles, § 233
deutsche Übersetzung Braunschweig 1880
- [3] A.E.H. Love Lehrbuch der Elastizität, § 293
deutsche Übersetzung von Timpe, Teubner-Verlag 1907
- [4] W. Wuest Die Biegeschwingungen einseitig eingespannter gekrümmter Stäbe und Rohre
Ing.-Archiv 17 (1949), S. 265-272
- [5] K. Federhofer Dynamik des Bogenträgers und Kreisringes
Springer-Verlag, Wien, 1950
- [6] Woinowsky-Krieger Über die Biegeschwingungen eines Kreisringes unter gleichmäßig verteiltem pulsierendem radialem Druck.
Ing.-Archiv 13 (1942), S. 90-96
- [7] K. Federhofer Erzwungene Schwingungen eines Kreisringes
Sitz.Ber. Österr.Akad.Wiss.,II, 166 (1957), S. 1-13
- [8] K. Federhofer Erzwungene Schwingungen eines Kreisbogenträgers mit zwei Gelenken bei pulsierender lotrechter Einzellast
Sitz.Ber. Österr.Akad.Wiss., II, 166 (1957), S. 125-137
- [9] L.L. Philipson On the role of extension in the flexural vibration of rings
J.Appl.Mech. 23 (1956), S. 364-366
- [10] S.A. Sorokov Vibrations of a round arc subjected to a concentrated load
Trudi Leningrad Polutekn.Inst., no. 192, S. 154-167
- [11] G. Hübner Untersuchungen über Schwingungen von Ständern elektr.Maschinen
VDI-Ber.Bd. 24 (1957), S. 51-58

- [12] Shimizu, H.,
Inoue, J.,
Hidaka, T. Sur le comportement statique et
dynamique de ressorts a section
circulaire (vibrations forcées)
Trans.Jap.Soc. Mech. Engrs. 27
(1961) No. 179, S. 1138-46
- [13] P. Matthieu Über transversale Stabschwingungen
und Dauerbrüche
Schweizer Archiv für angewandte
Wissenschaft und Technik (1946)
Heft 11 und 12
- [14] K. Zander Über die bei transversalen Schwin-
gungen prismatischer Stäbe auftre-
tenden Beanspruchungen
Dissertation Berlin 1957
- [15] H.-J. Sassor Über dynamische Beanspruchungen bei
Biegeschwingungen kegeliger und
pyramidenförmiger Stäbe
Dissertation Berlin 1962
- [16] A. Föppl Vorlesungen über technische Mechanik,
3. Band, Festigkeitslehre
Teubner-Verlag, Leipzig, 1922.

Abkürzungsverzeichnis

a	Radius der Stabachse
$c = \sqrt{E/\rho}$	Schallgeschwindigkeit im Stabwerkstoff
e	Abstand der Randfaser vom Querschnittsschwerpunkt
E	Elastizitätsmodul des Stabwerkstoffes
$f = Fa^2/I$	Schlankheitsparameter
F	Flächeninhalt des Stabquerschnitts
G	Schubmodul des Stabwerkstoffes
$i = \sqrt{I/F}$	Trägheitsradius des Stabquerschnitts
I	axiales Flächenträgheitsmoment des Stabquerschnitts
$k = a^4 \frac{\rho F}{EI} \omega^2$	2. Frequenzparameter
l	Bogenlänge des Stabes
M	Biegemoment
$\mathcal{M} = \frac{a^2}{EI} M$	bezogenes Biegemoment
n_m	Wellenzahlen der Lösungsfunktionen
N	Normalkraft
p_j	Wurzeln der charakteristischen Gleichung
Q	Querkraft
s	Bogenlänge als Koordinate längs der Stabachse
t	Zeit
u	Radialauslenkung der Stabachse
v	Tangentialauslenkung der Stabachse
α	Realteil
β	Imaginärteil
	} der konjugiert komplexen Wurzel
	} der charakteristischen Gleichung
$\gamma = 2(1+\nu)\lambda_s$	Schubparameter
ε	Dehnung der Stabachse
$\kappa = \frac{a^2 \rho}{E} \cdot \omega^2$	1. Frequenzparameter
$\lambda = l \sqrt[4]{\frac{\rho F}{EI}} \omega$	3. Frequenzparameter
λ_s	Formfaktor des Stabquerschnitts bezüglich Schubverformung
μ	Masse pro Längeneinheit der Stabachse
ν	Querkontraktionszahl des Stabwerkstoffes
ρ	Dichte des Stabwerkstoffes
σ	Normalspannung
τ	Schubspannung

- φ Zentriwinkel als Koordinate längs der Stabachse.
- φ_E Öffnungswinkel = Winkel zwischen den Endquerschnitten des Stabes
- ψ Neigungswinkel des Stabquerschnitts gegenüber dem unverformten Zustand
- ω Kreisfrequenz der Schwingung.
- $v' = \frac{dv}{d\varphi}$ usw. Ein hochgestellter Strich bedeutet eine Ableitung nach φ .

1. Einleitung und Aufgabenstellung

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit kreisbogenförmig gekrümmten, schlanken Stäben von konstantem und zur Kreisebene symmetrischem Querschnitt, die zu Biegeschwingungen in der Kreisebene angeregt werden.

Die Eigenschwingungen, insbesondere die Eigenfrequenzen, solcher Stäbe sind seit den ersten Arbeiten von Hoppe [1], Rayleigh [2] und Love [3] in der Literatur schon weitgehend behandelt worden. Es soll hier nur kurz das neuere Schrifttum angegeben werden, das den Inhalt der vorliegenden Arbeit berührt. Wuest berechnete in [4] die Eigenfrequenzen einseitig eingespannter Stäbe nach der einfachen Biegetheorie, d.h. unter Vernachlässigung von Achsdehnung, Schubverformung und Rotationsträgheit. In seinem Buch [5] faßte Federhofer seine bis dahin erschienenen, zahlreichen Aufsätze über die Schwingungen von Kreisbogenstäben zusammen und gab einen Überblick über die im Jahre 1950 bekannten Resultate. Hier wird für die freien Biegeschwingungen in der Kreisebene auch die Differentialgleichung angegeben, die die oben genannten Nebeneinflüsse berücksichtigt, und für den geschlossenen Ring gelöst.

Erzwungene Schwingungen unter der Wirkung zeitabhängiger radialer Streckenlasten oder Einzelkräfte wurden von Woinosky-Krieger [6], Federhofer [7], [8], Philipson [9], Sorokov [10], Hübner [11], Shimizu [12] und anderen untersucht.

In der vorliegenden Arbeit werden nun diejenigen erzwungenen Schwingungen behandelt, die durch harmonische, an den Stabenden angreifende Kräfte oder Momente erregt werden. Die Arbeit entstand auf Grund einer Anregung von Prof. Dr. Matthieu, der in [13] die Beanspruchungen in einseitig eingespannten, prismatischen und keilförmigen Stäben behandelte, wenn diese durch Bewegung ihrer Einspannung in erzwungene Schwingungen versetzt werden. Zander erörterte dann in [14] die Verteilung der kinetischen Biegespannungen in prismatischen Stäben systematisch für alle physikalisch sinnvollen Kombinationen von Randbedingungen. Von Sassor [15] wurden die Biegespannungen bei den erzwungenen und freien Biegeschwingungen kegeliger

und pyramidenförmiger Stäbe ermittelt, die am dicken Ende eingespannt sind.

Diese Untersuchungen werden nun auf Kreisbogenstäbe ausgedehnt. Es soll festgestellt werden, an welchen Stabstellen Dauerbrüche auftreten können, wenn die erzwungene Bewegung der Stabenden genügend groß ist.

Ausgangspunkt der Betrachtungen ist das Fundamentalsystem der Differentialgleichung 6. Ordnung für die Schwingungsform nach der einfachen Biegetheorie. Das Biegemoment, also die für die Beanspruchung maßgebende Größe, setzt sich aus 6 Exponentialfunktionen zusammen, und durch Superposition dieser Funktionen lassen sich sämtliche Spannungsverteilungen erfassen, die in der behandelten Klasse von Schwingungen möglich sind.

Der Verlauf der Beanspruchung längs der Stabachse hängt von 7 Parametern ab. Diese sind die Anregungsfrequenz, der Öffnungswinkel des Stabes und die 6 Randbedingungen, von denen aber nur 5 wesentlich sind. Werden nun jeweils einzelne dieser Parameter fest vorgegeben, während die restlichen frei bleiben, dann lassen sich aus einer Untersuchung der jeweils möglichen Spannungsverläufe einige allgemeine Sätze über die Lage der höchsten Beanspruchung herleiten.

Für einseitig eingespannte Stäbe wurde die Stelle, an der die größte Biegespannung auftritt, in Abhängigkeit von der Anregungsfrequenz und vom Öffnungswinkel des Stabes für einige typische Anregungsfälle numerisch berechnet. Hierfür wurde ein Digitalrechner (Zuse Z 23) benutzt.

Ein Teil der Rechenergebnisse wurde durch Versuche überprüft und bestätigt. Diese Versuche konnten im Institut für Mechanische Schwingungslehre der Technischen Universität Berlin durchgeführt werden.

2. Theoretische Grundlagen

2.1 Voraussetzungen

Es wird ein schlanker Stab mit kreisbogenförmiger Achse behandelt, dessen Querschnitt längs der Stabachse konstant und zur Kreisebene symmetrisch ist.

Ein solcher Stab soll durch harmonische Kräfte oder Momente, die an seinen Enden angreifen, zu ungedämpften, harmonischen Biegungs-Dehnungs-Schwingungen in der Kreisebene erregt werden; sonst sollen keine äußeren Kräfte oder Momente auf den Stab einwirken.

Die eigentliche Untersuchung beschränkt sich (ab Kap. 2.3) auf einen sehr schlanken Stab, bei dem die Querschnittsabmessungen gegenüber dem Radius der Stabachse sehr klein sind. Dann können die Einflüsse von Schubverformung, Achsdehnung und Rotationsträgheit vernachlässigt werden.

2.2 Herleitung der Differentialgleichung für die Schwingungsform

2.2.1 Bezeichnungen

Der Radius der unverformten Stabachse wird mit a bezeichnet. Als Koordinate längs der Stabachse benutzen wir die Bogenlänge s bzw. den Zentriwinkel φ . Die Lage eines ausgelenkten Stabquerschnittes wird durch die Radialverschiebung u , die Tangentialverschiebung v und durch den Neigungswinkel ψ gegenüber dem unverformten Zustand beschrieben (siehe Abb.1). Weitere verwendete Symbole sind im Abkürzungsverzeichnis auf S.4 zusammengestellt.

2.2.2 Kinetische Gleichgewichtsbedingungen

Die Schnittlasten werden in der beim geraden Stab üblichen Weise definiert (siehe Abb.2). Da am Stabelement keine äußeren Lasten angreifen sollen, müssen die Schnittlasten mit den d'Alembertschen Trägheitskräften im Gleichgewicht sein.

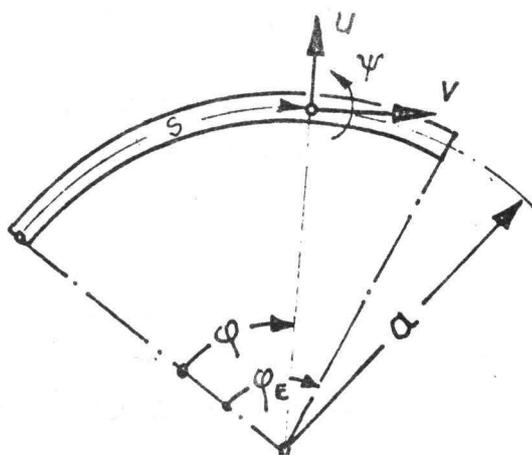


Abb. 1

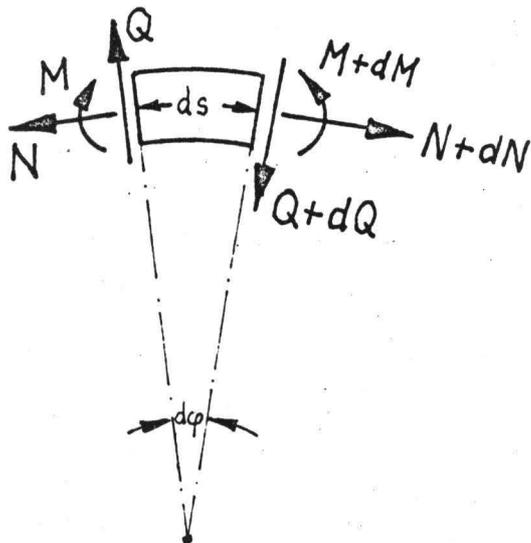


Abb. 2

Die Gleichgewichtsbedingungen liefern

für die Kräfte in Radialrichtung
$$\frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{N}{a} = -\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.1)$$

für die Kräfte in Umfangrichtung
$$\frac{\partial N}{\partial s} - \frac{Q}{a} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (2.2)$$

und für das Momentengleichgewicht
$$\frac{\partial M}{\partial s} - Q = \mu i^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (2.3)$$

2.2.3 Beziehungen zwischen den Schnittlasten und den Deformationen

Auf Grund der Stabbiegungstheorie kleiner Verformungen gelten für Normalkraft und Biegemoment die Beziehungen

$$N = EF \varepsilon \quad (2.4)$$

und
$$M = EI \frac{\partial \psi}{\partial s} \quad (2.5)$$

wobei ε die Dehnung der Stabachse bedeutet.

Die Kinematik des Kreisbogenstabes liefert für die Dehnung

$$\varepsilon = \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{u}{a} \quad (2.6)$$

Damit erhält man für die Normalkraft

$$N = EF \left(\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{u}{a} \right) \quad (2.7)$$

Die Neigung der Stabachse gegenüber dem unverformten Zustand setzt sich aus folgenden Anteilen zusammen:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \underbrace{\psi}_{\text{Drehung als starrer Körper}} + \underbrace{\frac{v}{a}}_{\text{Verschiebung in Umfangsrichtung als starrer Körper}} - \underbrace{\frac{Q}{GF_s}}_{\text{Deformation des Elements durch die Schubkraft}} \quad (2.8)$$

Hierbei ist F_s der sog. "wirksame Schubquerschnitt". Er ist definiert durch

$$F_s = \frac{F}{\lambda_s}, \quad (2.9)$$

wobei λ_s den Formfaktor des Querschnitts bezüglich der Schubverformung bedeutet (vgl. z.B. [16], § 29).

Mit den Gleichungen (2.5), (2.7) und (2.8) haben wir die benötigten drei Beziehungen zwischen den Schnittlasten und den Verschiebungsgrößen. Sie seien hier noch einmal zusammengestellt:

$$\begin{aligned} M &= EI \frac{\partial \psi}{\partial s} \\ N &= EF \left(\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{u}{a} \right) \\ Q &= GF_s \left(-\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{v}{a} + \psi \right) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen können wir die Schnittlasten aus den kinetischen Gleichgewichtsbedingungen eliminieren und erhalten aus (2.1), (2.2) und (2.3) die folgenden drei Beziehungen:

$$GF_s \left(-\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial \psi}{\partial s} \right) + \frac{EF}{a} \left(\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{u}{a} \right) = -\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.11)$$

$$EF \left(\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial s} \right) - \frac{GF_s}{a} \left(-\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{v}{a} + \psi \right) = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (2.12)$$

$$EI \frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} - GF_s \left(-\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{v}{a} + \psi \right) = \mu i^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (2.13)$$

Diese drei gekoppelten, partiellen Differentialgleichungen beschreiben die Bewegung unter Berücksichtigung von Achsdehnung, Schubverformung und Rotationsträgheit.

2.2.4 Aufstellung der Differentialgleichung für die Tangentialverschiebung

Es soll nun durch Elimination von zweien der Verschiebungsgrößen eine einzige Differentialgleichung aufgestellt werden. Um den Eliminationsprozeß zu vereinfachen, benutzen wir den Lösungsansatz

$$\left. \begin{aligned} v(s,t) &= v(s) \sin(\omega t + \sigma) \\ u(s,t) &= u(s) \sin(\omega t + \sigma) \\ \psi(s,t) &= \psi(s) \sin(\omega t + \sigma) \end{aligned} \right\} (2.14)$$

für harmonische Schwingungen und wandeln damit die partiellen Differentialgleichungen in gewöhnliche Differentialgleichungen für die Ortsfunktionen $v(s)$, $u(s)$ und $\psi(s)$ um. Setzt man die Gleichung (2.12) in der Form

$$\psi = \frac{du}{ds} - \frac{v}{a} + \frac{\mu a \omega^2}{GF_s} v + \frac{EFa}{GF_s} \left(\frac{d^2v}{ds^2} + \frac{1}{a} \frac{du}{ds} \right) \quad (2.15)$$

in die Gleichungen (2.11) und (2.13) ein, erhält man

$$a^2 \frac{d^3v}{ds^3} + \left(1 + \frac{\mu a^2 \omega^2}{EF} \right) \frac{dv}{ds} + a \frac{d^2u}{ds^2} + \left(1 - \frac{\mu a^2 \omega^2}{EF} \right) \frac{u}{a} = 0 \quad (2.16)$$

und

$$\left. \begin{aligned} EI a \frac{EF}{GF_s} \frac{d^4v}{ds^4} + EFa \left[\frac{\mu a^2 \omega^2}{GF_s} \left(\frac{I}{Fa^2} + \frac{i^2}{a^2} \right) - \left(\frac{I}{Fa^2} + 1 \right) \right] \frac{d^2v}{ds^2} \\ + \mu a \omega^2 \left[\frac{\mu a^2 \omega^2}{GF_s} \frac{i^2}{a^2} - 1 - \frac{i^2}{a^2} \right] v + EI \left(\frac{EF}{GF_s} + 1 \right) \frac{d^3u}{ds^3} \\ + EF \left[\frac{\mu a^2 \omega^2}{EF} \frac{i^2}{a^2} \left(\frac{EF}{GF_s} + 1 \right) - 1 \right] \frac{du}{ds} \end{aligned} \right\} = 0. \quad (2.17)$$

Es erweist sich als vorteilhaft, als unabhängige Variable den Zentriwinkel $\varphi = s/a$ statt der Bogenlänge s zu benutzen.

Die Ableitung nach φ wird von jetzt an mit einem Strich gekennzeichnet. Es bedeutet

$$v' = \frac{dv}{d\varphi} \quad \text{usw.}$$

Außerdem werden folgende Abkürzungen eingeführt:

$$\frac{\mu a^2 \omega^2}{EF} = \kappa \quad (2.18)$$

$$\frac{Fa^2}{J} = f \quad (2.19)$$

$$\frac{EF}{GF_s} = \gamma \quad (2.20)$$

Damit nehmen die Gleichungen (2.16) und (2.17) die Gestalt

$$v''' + (1+\kappa)v' + u'' + (1-\kappa)u = 0 \quad (2.21)$$

und

$$\left. \begin{aligned} \frac{f}{f} v^{IV} + \left[\kappa \gamma \left(\frac{1}{f} + \frac{i^2}{a^2} \right) - \frac{1}{f} - 1 \right] v'' + \kappa \left[\kappa \gamma \frac{i^2}{a^2} - 1 - \frac{i^2}{a^2} \right] v \\ + \frac{\gamma+1}{f} u''' + \left[\kappa(\gamma+1) \frac{i^2}{a^2} - 1 \right] u' = 0 \end{aligned} \right\} (2.22)$$

an.

Um u zu eliminieren, differenzieren wir Gleichung (2.21) und erhalten

$$u''' + (1-\kappa)u' + v^{IV} + (1+\kappa)v'' = 0 \quad (2.23)$$

Die Kombination dieser Gleichung mit (2.22) ergibt zunächst die Beziehung

$$\left. \begin{aligned} [f+\gamma+1 - \kappa(\gamma+1)(1+f\frac{i^2}{a^2})] u' \\ = -v^{IV} - [f+\gamma+2 - \kappa(\gamma f\frac{i^2}{a^2}-1)] v'' \\ + \kappa f [\kappa \gamma \frac{i^2}{a^2} - 1 - \frac{i^2}{a^2}] v \end{aligned} \right\} (2.24)$$

Setzt man diesen Ausdruck wiederum in Gleichung (2.23) ein, findet man schließlich die gesuchte Differentialgleichung für v. Diese lautet

$$v^{VI} + C_2 v^{IV} + C_1 v'' + C_0 v = 0, \quad (2.25)$$

wobei die Koeffizienten durch folgende Ausdrücke gegeben sind:

$$\left. \begin{aligned} C_0 &= \kappa f (1-\kappa) \left(1 + \frac{i^2}{a^2} - \kappa \gamma \frac{i^2}{a^2} \right) \\ C_1 &= 1 - \kappa (f+\gamma+1 - 2f\frac{i^2}{a^2}) + \kappa^2 \left[f\frac{i^2}{a^2} + \gamma(1+f\frac{i^2}{a^2}) \right] \\ C_2 &= 2 + \kappa \left(\gamma + f\frac{i^2}{a^2} + 1 \right) \end{aligned} \right\} (2.26)$$

Hierbei sind zunächst f und i^2/a^2 als verschiedene Parameter

aufgeführt, um ihre verschiedene Herkunft anzudeuten. $f = Fa^2/I$ kommt durch die Dehnung der Bogenachse herein, während i^2/a^2 die Berücksichtigung der Rotationsträgheit kennzeichnet.

In Wirklichkeit ist ja $i^2/a^2 = 1/f$, so daß die Ausdrücke für die Koeffizienten sich zu

$$C_0 = \kappa f (1 - \kappa) \left(1 + \frac{1}{f} - \kappa \frac{\gamma}{f}\right) \quad (2.27)$$

$$C_1 = 1 - \kappa f \left(1 - \frac{1}{f} + \frac{\gamma}{f}\right) + \kappa^2 (1 + 2\gamma) \quad (2.28)$$

und

$$C_2 = 2 + \kappa (\gamma + 2) \quad (2.29)$$

vereinfachen.

In der Differentialgleichung für die Schwingungsform treten also die folgenden drei Parameter auf:

- 1.) $\kappa = \frac{a^2 \rho}{E} \omega^2 = \frac{a^2}{c^2} \omega^2$ = Frequenzparameter, enthält die Schwingungsfrequenz ω , den Stabradius a und die Materialkonstante $c = \sqrt{E/\rho}$ (Schallgeschwindigkeit im Stabwerkstoff)
- 2.) $f = \frac{Fa^2}{I} = \frac{a^2}{i^2}$ = "Schlankheitsparameter", enthält das Verhältnis des Radius a zum Trägheitsradius i des Querschnitts
- 3.) $\gamma = \frac{EF}{GJ_s} = 2(1+\nu)\lambda_s$ = "Schubparameter", enthält die Querkontraktionszahl ν des Werkstoffs und den Formfaktor λ_s des Querschnitts bezüglich Schubverformung.

2.2.5 Beziehungen zwischen der Tangentialverschiebung und den übrigen Zustandsgrößen des Stabes

Um die Randbedingungen formulieren zu können und um aus der Schwingungsform die Beanspruchungen berechnen zu können, müssen wir die anderen mechanischen Zustandsgrößen des Stabes, nämlich

u , ψ , M , N und Q durch v ausdrücken. Dabei wollen wir die Identität

$$i^2/a^2 = 1/f$$

von vornherein berücksichtigen.

Für die Radialverschiebung u ziehen wir die Gleichungen (2.21) und (2.24) heran und erhalten den Ausdruck

$$u = \frac{1}{(1-\alpha)K_0^*} (v^v + K_3 v''' + K_1 v') \quad (2.30)$$

mit den Koeffizienten

$$K_0^* = f + \gamma + 1 - 2\alpha(\gamma + 1), \quad (2.31)$$

$$K_1 = -(f + \gamma + 1) + \alpha(\gamma + 2)(\alpha + 1) \quad (2.32)$$

und
$$K_3 = 1 + \alpha(\gamma + 3). \quad (2.33)$$

Als Beziehung zwischen der Querschnittsverdrehung und der Tangentialverschiebung v erhalten wir aus Gleichung (2.15) zunächst

$$\psi = \frac{1}{a} [(\gamma + 1)u' + (\alpha - 1)v + \gamma v''] \quad (2.34)$$

und mit Gleichung (2.24) schließlich

$$\psi = \frac{1}{\alpha K_0^*} [-(\gamma + 1)v'' + K_2 v'' + K_0 v]. \quad (2.35)$$

Die hierin auftretenden Koeffizienten K_0 und K_2 sind durch

$$K_0 = -(f + \gamma + 1) + \alpha[f + (2-f)(\gamma + 1)] - \alpha^2(\gamma + 2) \quad (2.36)$$

und
$$K_2 = -[f + 2(\gamma + 1) + \alpha(\gamma + 1)^2] \quad (2.37)$$

gegeben, die Bedeutung von K_0^* durch Gleichung (2.31).

Mit Hilfe der kinematischen Größen lassen sich nun die Schnittlasten durch v ausdrücken.

Das Biegemoment folgt aus den Gleichungen (2.5) und (2.30) zu

$$M = \frac{EI}{\alpha^2 K_0^*} [-(\gamma + 1)v^v + K_2 v''' + K_0 v']. \quad (2.38)$$

Die Normalkraft ergibt sich aus den Gleichungen (2.7) und (2.30). Es ist

$$N = \frac{EF}{\alpha} \frac{1}{(1-\alpha)K_0^*} (v^v + K_3 v''' + K_4 v'), \quad (2.39)$$

wobei der Koeffizient K_4 die Bedeutung

$$K_4 = -\kappa (f + 2\gamma + 1) + \kappa^2 (3\gamma + 4) \quad (2.40)$$

hat und K_0^* bzw. K_3 durch die Gleichungen (2.31) bzw. (2.33) festgelegt sind.

Für die Querkraft erhalten wir aus den Gleichungen (2.2) und (2.39)

$$Q = \frac{EF}{a} \frac{1}{(1-\kappa)K_0^*} (v'''' + K_3 v'''' + K_4 v'' + K_5 v) \quad (2.41)$$

mit

$$K_5 = f + \gamma + 1 - \kappa (3\gamma + 3 + f) + 2\kappa^2 (\gamma + 1). \quad (2.42)$$

2.3 Beschränkungen auf sehr schlanke Stäbe und relativ niedrige Frequenzen

2.3.1 Differentialgleichung und Randbedingungen

Aus der Differentialgleichung (2.25) und den Beziehungen für die Auslenkungen und die Schnittkräfte erkennt man, daß infolge des Auftretens von drei Parametern eine allgemeine Darstellung der Verhältnisse unter Berücksichtigung der Nebeneinflüsse sehr kompliziert ist.

Wir wollen uns daher auf sehr schlanke Stäbe ($1 \ll a$) beschränken. Dann wird $f = a^2/i^2 \gg 1$, und die Koeffizienten der Differentialgleichung (siehe Gleichungen (2.27) bis (2.29)) gehen über in

$$\left. \begin{aligned} c_0 &\approx \kappa f - \kappa^2 f + \kappa^3 \gamma, \\ c_1 &\approx 1 - \kappa f + \kappa^2 (1 + 2\gamma) \\ \text{und} \quad c_2 &= 2 + \kappa (\gamma + 2) \end{aligned} \right\} (2.43)$$

Außerdem soll der Parameter $\kappa \ll 1$ sein, d.h. wir behandeln nur den Bereich relativ niedriger Frequenzen. Dann reduzieren die Koeffizienten sich auf

$$\left. \begin{aligned} c_0 &\approx \kappa f \\ c_1 &\approx 1 - \kappa f \\ \text{und} \quad c_2 &\approx 2 \end{aligned} \right\} (2.44)$$

und es empfiehlt sich,

$$k = \alpha f \quad (2.45)$$

als neuen Frequenzparameter einzuführen.

Unter diesen Voraussetzungen erhalten wir als Differentialgleichungen für die Tangentialauslenkung v

$$v^{VI} + 2v^{IV} + (1-k)v'' + kv = 0. \quad (2.46)$$

Diese Gleichung beruht also auf der einfachen Biegungstheorie ohne Berücksichtigung von Achsdehnung, Schubverformung und Rotationsträgheit. Sie enthält als einzigen Parameter den Frequenzparameter

$$k = a^4 \frac{\rho F}{EI} \omega^2 = \frac{a^4}{c^2 l^2} \omega^2. \quad (2.47)$$

Hierbei bedeutet

$$c = \sqrt{\frac{E'}{\rho}}$$

die Schallgeschwindigkeit im Stabwerkstoff.

Im Gültigkeitsbereich von Gleichung (2.46) (Frequenzparameter k sehr klein gegenüber dem Schlankheitsparameter f) vereinfachen sich natürlich auch die Beziehungen für u , ψ und die Schnittlasten.

Auf Grund der kinematischen Beziehung für die Dehnung der Stabachse

$$\varepsilon = \frac{1}{a} (v' + u)$$

gilt für den dehnungslosen Kreisbogen

$$u = -v'. \quad (2.48)$$

Aus Gleichung (2.8) folgt für die Querschnittsneigung

$$\psi = \frac{1}{a} (u' - v)$$

und mit Gleichung (2.48)

$$\psi = -\frac{1}{a} (v + v''). \quad (2.49)$$

Für das Biegemoment gilt dann

$$M = \frac{EI}{a} \psi' = -\frac{EI}{a^2} (v' + v''') \quad (2.50)$$

und für die Querkraft auf Grund von Gleichung (2.3)

$$Q = \frac{M'}{a} = -\frac{EI}{a^3} (v'' + v^{IV}) \quad (2.51)$$

Die Normalkraft ergibt sich aus den Gleichungen (2.1) und (2.51) zu

$$N = \frac{EI}{a^3} (v''' + v'' - kv'). \quad (2.52)$$

Nachdem die Beziehungen zwischen der Tangentialverschiebung v und den anderen mechanischen Zustandsgrößen des Stabes aufgestellt worden sind, können nun die Randbedingungen formuliert werden. Für jedes Stabende bestehen je nach Lagerungsart drei Gleichungen für je eine der Zustandsgrößen oder für eine Kombination aus ihnen. Je eine von den kinematischen und den dynamischen Größen gehören zu einer Gruppe, und diese Gruppen sollen in der nachstehenden Tabelle zusammengestellt werden.

Zusammenstellung der Zustandsgrößen

Gruppe	kinematische Größen	dynamische Größen
L	Längsverschiebung v	Längskraft $N = \frac{EI}{a^3} (v''' + v'' - kv')$
T	Querverschiebung $u = -v'$	Querkraft $Q = -\frac{EI}{a^2} (v'' + v''')$
R	Neigungswinkel $\psi = -\frac{1}{a} (v + v''')$	Biegemoment $M = -\frac{EI}{a^2} (v' + v''')$

Die in der ersten Zeile stehenden Zustandsgrößen kann man als longitudinal (L), die in der zweiten Zeile als transversal (T) und die in der dritten Zeile als rotatorisch (R) bezeichnen. Bei physikalisch sinnvollen Randbedingungen muß an jedem Stabende je eine Aussage über die Größen aus Gruppe L, T und R gemacht werden.

Während bei den Biegeschwingungen gerader Stäbe nur die Gruppen T und R auftreten, besteht bei gekrümmten Stäben infolge der Kopplung zwischen Längs- und Querbewegung eine wesentlich größere Anzahl möglicher Kombinationen von Randbedingungen.

2.3.2 Ähnlichkeitsbetrachtung

Die Differentialgleichung eines Modellstabes (Index M)

$$\frac{d^6 v_M}{d\varphi_M^6} + 2 \frac{d^4 v_M}{d\varphi_M^4} + (1 - k_M) \frac{d^2 v_M}{d\varphi_M^2} + k_M v_M = 0$$

und die zugehörigen Randbedingungen

$$\sum_{n=0}^5 a_{nj} v_M^{(n)}(\varphi_j) = b_j \quad (j = 1, 2, \dots, 6)$$

lassen sich nur dann in die Gleichungen eines anderen Stabes (Index O) überführen, wenn

$$1.) \quad \varphi_M = \varphi_0$$

und $2.) \quad k_M = k_0$

sind. Das bedeutet, daß nur Stäbe mit gleichem Öffnungswinkel⁺ zueinander modellähnlich schwingen können. Die Übereinstimmung der Frequenzparameter k_M und k_0 (siehe Gleichung 2.47) läßt sich durch Wahl der Frequenz, der Stabmessungen oder des Werkstoffes immer erreichen. Bei vorgegebenen Werten von a , i und c besteht Modellähnlichkeit bei folgender Wahl des Frequenzmaßstabes m_ω :

$$m_\omega = \frac{m_c m_i}{m_a} \quad (2.53)$$

Hierbei bedeuten $m_\omega = \frac{\omega_M}{\omega_0}$, $m_a = \frac{a_M}{a_0}$ usw. die Maßstäbe für die Frequenz, der Radius der Stabachse usw.

Außerdem müssen zwischen den Maßstäben für v , u , ψ , M , Q und N folgende Bedingungen eingehalten werden:

$$\left. \begin{aligned} m_u &= m_v \\ m_\psi &= \frac{m_v}{m_a} \\ m_M &= \frac{m_E m_I m_v}{m_a^2} \\ m_Q &= m_N = \frac{m_E m_I m_v}{m_a^3} \end{aligned} \right\} (2.54)$$

Vergleicht man die Bedingungen für die mechanische Ähnlichkeit mit denen bei geraden Stäben, dann kommt bei Kreisbogenstäben als wesentlicher Parameter der Öffnungswinkel hinzu.

2.3.3 Lösungsfunktionen der Differentialgleichung

Die Differentialgleichung

$$v^{IV} + 2v^{IV} + (1-k)v'' + kv = 0$$

für die Längsverschiebung ist eine gewöhnliche, lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, deren Lösungen

+) Der Öffnungswinkel ist der Winkel zwischen den beiden Endquerschnitten des Stabes (siehe Abb. 1).

Exponentialfunktionen sind. Geht man mit dem Ansatz

$$v = C e^{p\varphi} \quad (2.55)$$

in Gleichung (2.46), dann erhält man die charakteristische Gleichung für den Exponenten p . Sie lautet

$$p^6 + 2p^4 + (1-k)p^2 + k = 0. \quad (2.56)$$

Diese Gleichung ist kubisch in $P = p^2$ und kann auch in der Form

$$P^3 + 2P^2 + (1-k)P + k = 0 \quad (2.57)$$

geschrieben werden.

Ihre drei Wurzeln können mit Hilfe der cardanischen Formeln exakt angegeben werden. Sie haben die Größe

$$\begin{aligned} P_1 &= U + V - \frac{2}{3}, \\ P_2 &= w_1 U + w_2 V - \frac{2}{3} \\ \text{und } P_3 &= w_2 U + w_1 V - \frac{2}{3}. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Hierbei stellen w_1 und w_2 die beiden konjugiert komplexen Werte von $\sqrt[3]{1}$, nämlich

$$\left. \begin{aligned} w_1 &= \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}) \\ \text{und } w_2 &= \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3}), \end{aligned} \right\} (2.59)$$

dar, und U und V sind Abkürzungen für die Ausdrücke

$$\left. \begin{aligned} U &= \sqrt[3]{Q + \sqrt{R}} \quad \text{und} \quad V = \sqrt[3]{Q - \sqrt{R}} \\ \text{mit } Q &= \frac{1}{27} - \frac{5}{6}k \\ \text{und } R &= \frac{k}{27}(-k^2 + \frac{71}{4}k - 2). \end{aligned} \right\} (2.60)$$

Je nach Größe des Parameters k können zwei von den Wurzeln (2.58) konjugiert komplex oder reell sein; die dritte ist immer reell. Die Grenzen des Bereichs konjugiert komplexer Wurzeln ergeben sich als Lösungen der Gleichung

$$R = \frac{k}{27}(-k^2 + \frac{71}{4}k - 2) = 0. \quad (2.61)$$

Die eine Lösung $k = 0$ ist uninteressant; denn negative k -Werte sind physikalisch unmöglich. Die beiden Lösungen der verbleibenden quadratischen Gleichung

$$k^2 - \frac{71}{4}k + 2 = 0$$

liefern die gesuchten Grenzwerte

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= \frac{71}{8} - \sqrt{\left(\frac{71}{8}\right)^2 - 2} \approx 0,113401 \\ \text{und } k_2 &= \frac{71}{8} + \sqrt{\left(\frac{71}{8}\right)^2 - 2} \approx 17,6366 \end{aligned} \right\} (2.62)$$

Für $k_1 < k < k_2$ ist ein Wurzelpaar von Gleichung (2.57) konjugiert komplex.

Zur zahlenmäßigen Auswertung ist die Form (2.58) sehr unpraktisch, denn für den Fall

$$R = \frac{k}{27} \left(-k^2 + \frac{71}{4}k - 2 \right) < 0$$

erscheinen die Wurzeln auch in konjugiert komplexer Form, obwohl sie alle drei reell sind.

Die Verhältnisse überblickt man am besten anhand der graphischen Lösung der Gleichung (2.57). Man schreibt sie in die Form

$$P(P+1)^2 = k(P-1) \quad (2.63)$$

um und stellt die beiden Seiten dieser Gleichung als Funktionen von P dar (siehe Abb.3).

Für alle Werte von k hat die Gerade

$$y_1 = k(P-1)$$

mit der kubischen Parabel

$$y_2 = P(P+1)^2$$

einen reellen Schnittpunkt (S_1) mit negativer Abszisse. Zwei weitere reelle Schnittpunkte treten für kleine k -Werte (Bereich I, siehe oberen Teil von Abb. 3) und für genügend große k -Werte (Bereich III, siehe unteren Teil von Abb. 3) auf. Im dazwischenliegenden Bereich II sind die zugehörigen Wurzeln komplex. Die Bereichsgrenzen sind durch die Werte von k gegeben, für die die Gerade y_1 die kubische Parabel y_2 berührt.

Die Wurzeln

$$p_{j,j+1} = \pm \sqrt[p_m]{p_m} \quad (j=2m-1; m=1,2,3)$$

der charakteristischen Gleichung (2.56) sind also je nach

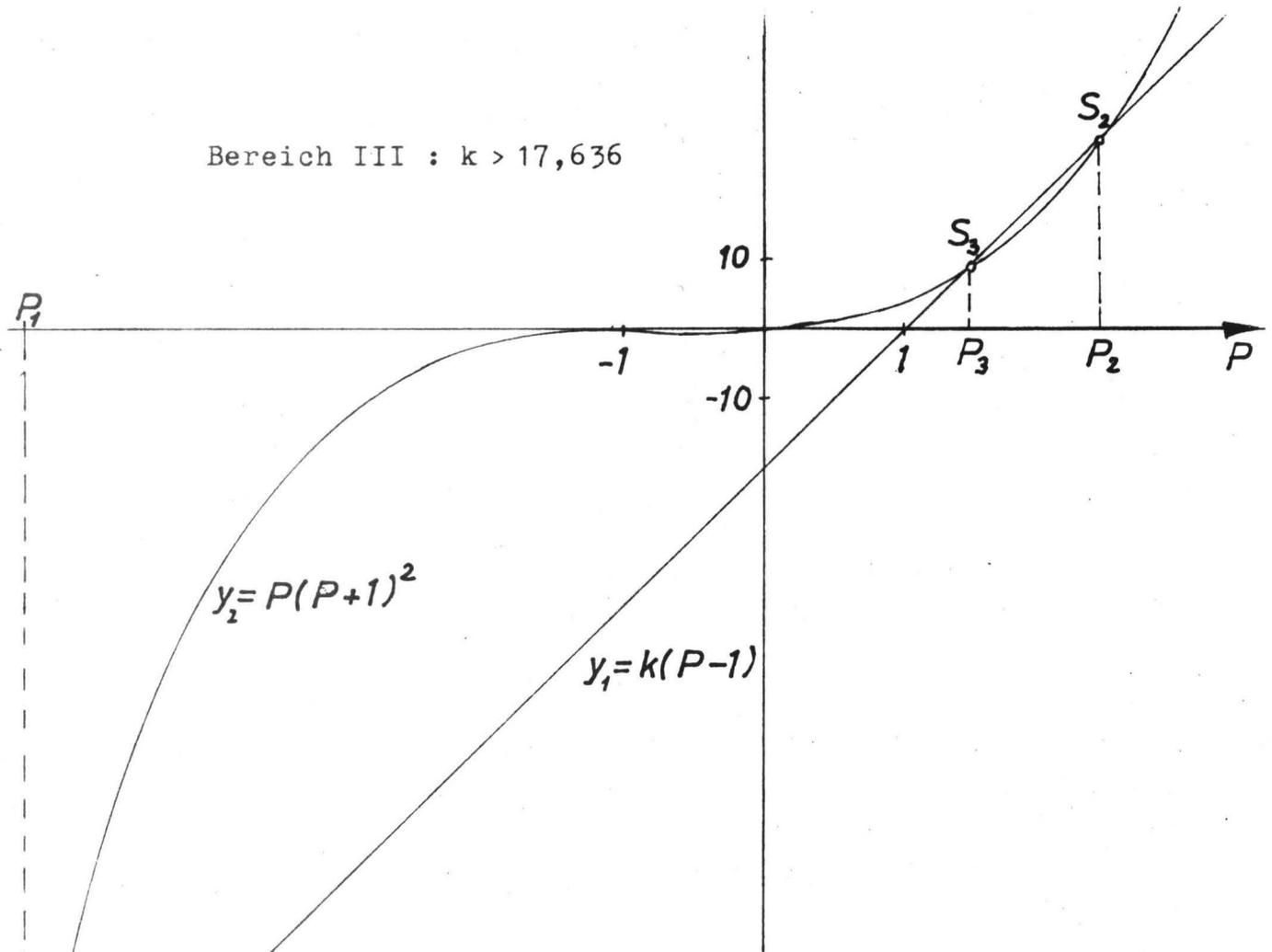
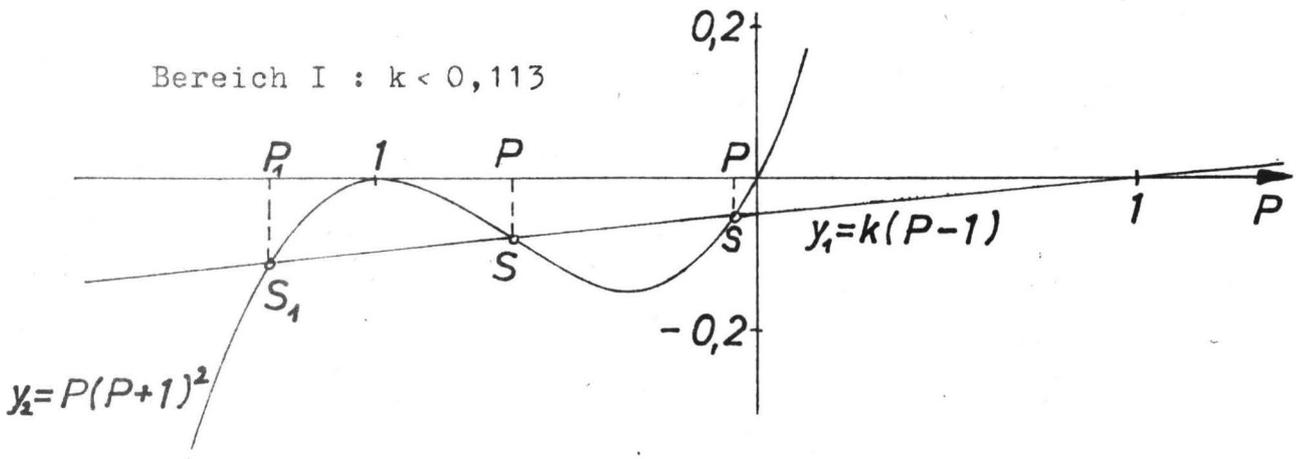
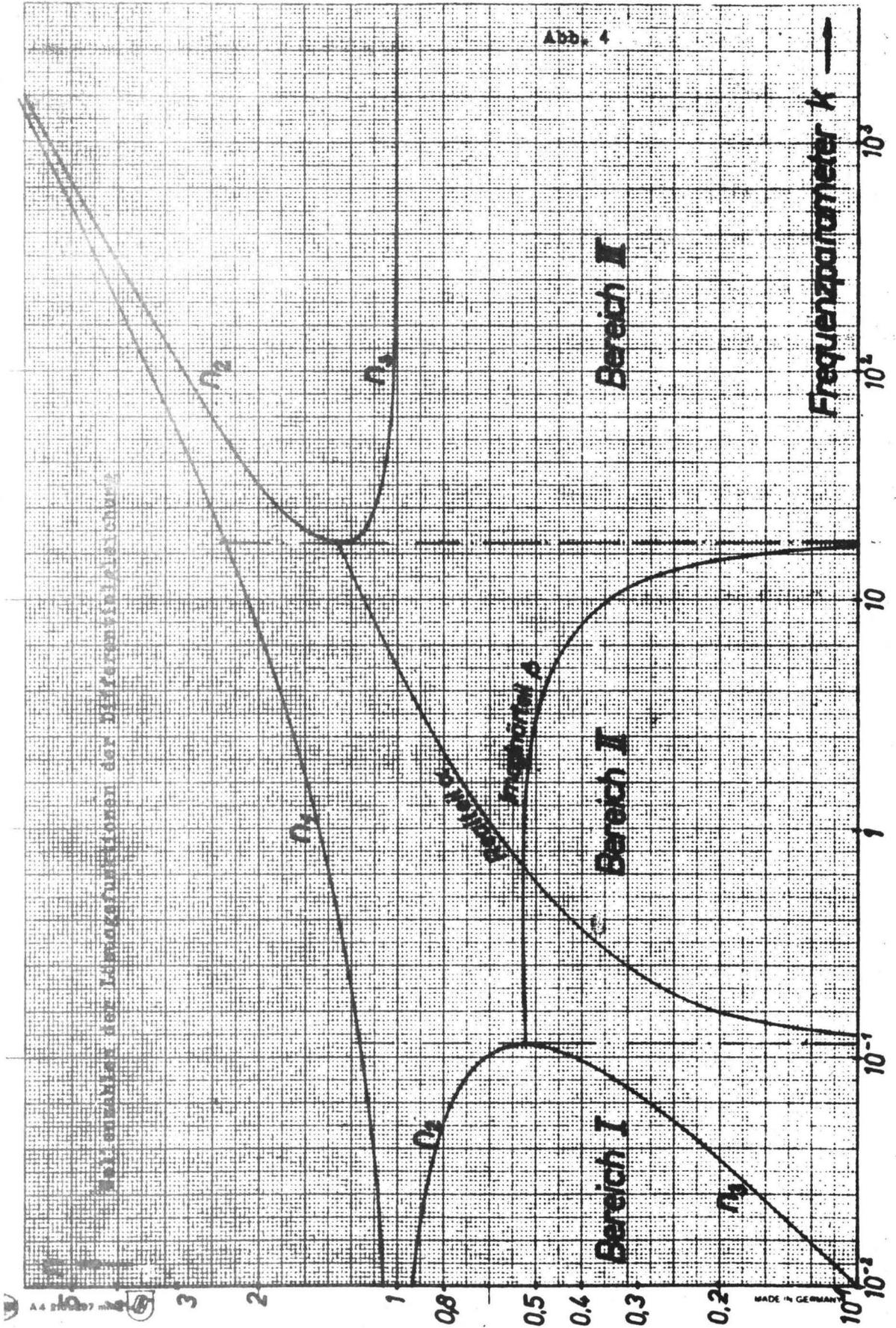


Abb. 3

Graphische Lösung der charakteristischen Gleichung $P(P+1)^2 = k(P-1)$



Größe des Parameters k von verschiedenem Typ. Sie sollen in der nachstehenden Tabelle übersichtlich zusammengestellt werden.

Lösungsbereich		I	II	III
Parameter		$0 < k < 0,113$	$0,113 < k < 17,636$	$17,636 < k$
Wurzeln von (2.57)	P_1 P_2, P_3	reell, neg. reell, neg.	reell, neg. konj. komplex	reell, neg. reell, pos.
Wurzeln von (2.56)	$p_{4,2}$ $p_{3,4}, p_{5,6}$	rein imag. rein imag.	rein imag. konj. komplex	rein imag. reell, pos.
Schreib- weise	$p_{1,2} =$ $p_{3,4} =$ $p_{5,6} =$	$\pm i n_1$ $\pm i n_2$ $\pm i n_3$	$\pm i n_1$ $\pm (\alpha + i \beta)$ $\pm (\alpha - i \beta)$	$\pm i n_1$ $\pm n_2$ $\pm n_3$

Im Falle einer rein imaginären Wurzel wird der Betrag mit n bezeichnet, im Fall einer komplexen Wurzel der Realteil mit α und der Imaginärteil mit β . Die reellen Zahlen n , α und β sollen der Kürze halber "Wellenzahlen" genannt werden.

Der Verlauf dieser Wellenzahlen in Abhängigkeit von Frequenzparameter k ist in Abb. 4 dargestellt.

Für sehr kleine k (Bereich I) und für große k (Bereich III) kann man für die Wurzeln p_j Näherungsformeln angeben.

1.) Bereich I

Wenn $k \ll 1$ ist, ist auch eine Lösung $p \ll 1$, und aus Gleichung (2.57) folgt dann näherungsweise

$$P_1 = -k.$$

Abspalten dieser Näherungslösung vom Polynom (2.57) liefert als Näherung für die beiden anderen Wurzeln

$$P_{2,3} = - (1 \pm \sqrt{2k}) .$$

Also nehmen für $k \rightarrow 0$ die Exponenten p_j näherungsweise die Werte

und
an.

$$\left. \begin{aligned} p_{1,2} &= \pm i \sqrt{k} \\ p_{3,4} &= \pm i \left(1 + \sqrt{\frac{k}{2}}\right) \\ p_{5,6} &= \pm i \left(1 - \sqrt{\frac{k}{2}}\right) \end{aligned} \right\} (2.64)$$

2.) Bereich III

Dort hat eine Lösung immer näherungsweise die Größe

$$p_3 = 1,$$

und demnach ist

$$p_{5,6} \approx 1. \quad (2.65a)$$

Abspalten des Faktors $(P - 1)$ vom Polynom (2.57) führt auf folgende Näherung für die beiden anderen Wurzeln P_1 und P_2 :

$$p_{1,2} \approx -\frac{3}{2} \pm \sqrt{k}$$

Daraus folgt

$$\left. \begin{aligned} p_{1,2} &\approx \pm i \sqrt{\sqrt{k} + \frac{3}{2}} \\ \text{und} \quad p_{3,4} &\approx \pm \sqrt{\sqrt{k} - \frac{3}{2}} \end{aligned} \right\} (2.65b)$$

Für $k \rightarrow \infty$ nähern die Exponenten p_j sich asymptotisch folgenden Werten:

$$\left. \begin{aligned} p_{1,2} &= \pm i \sqrt[4]{k} \\ p_{3,4} &= \pm \sqrt[4]{k} \\ p_{5,6} &= \pm 1 \end{aligned} \right\} (2.66)$$

Dieser Grenzfall hat jedoch nur mathematischen Charakter; denn die zugrundeliegende einfache Biegungstheorie gilt nur für niedrige Frequenzen, d.h. für Werte des Frequenzparameters $k \ll f$. Wenn $k \approx f$ wird, spielen die Nebeneinflüsse schon eine entscheidende Rolle.

Praktisch kann man die Näherungen (2.66) aber auch für k -Werte mittlerer Größe verwenden.

In den folgenden Abschnitten 2.3.3.1 bis 2.3.3.5 sollen nun die Lösungsfunktionen der Differentialgleichung (2.46) angegeben werden. Entsprechend dem unterschiedlichen Charakter der Wurzeln der charakteristischen Gleichung werden die Lösungsfunktionen (2.55) in den drei Bereichen des Frequenzparameters durch unterschiedliche reelle Funktionen dargestellt.

Die allgemeine Lösung für $v(\varphi)$ ist immer die Linearkombination aller speziellen Lösungsfunktionen.

2.3.3.1 Frequenzbereich I ($0 < k < 0,113$)

In diesem Bereich kann man die Wurzeln der charakteristischen Gleichung in der Form

$$p_{j,j+1} = \pm i n_m \quad (j = 2m-1; m = 1, 2, 3) \quad (2.67)$$

schreiben, wobei die n_m reelle Zahlen sind. In den Ansatz (2.55) eingesetzt, liefern sie als Lösungsfunktionen

$$v_m(\varphi) = A_m \cos n_m \varphi + B_m \sin n_m \varphi \quad (m = 1, 2, 3) \quad (2.68)$$

bzw.

$$v_m(\varphi) = C_m \sin n_m(\varphi + \varphi'_m) \quad (2.69)$$

mit C_m und φ'_m als freien Konstanten.

2.3.3.2 Frequenzbereich II ($0,113 < k < 17,636$)

Die zu den Wurzeln

$$\left. \begin{aligned} p_{1,2} &= \pm i n_1 \\ p_{3,4} &= \pm (\alpha + i\beta) \\ \text{und} \quad p_{5,6} &= \pm (\alpha - i\beta) \end{aligned} \right\} (2.70)$$

der charakteristischen Gleichung gehörenden reellen Lösungsfunktionen sind

$$\left. \begin{aligned} v_1(\varphi) &= A_1 \cos n_1 \varphi + B_1 \sin n_1 \varphi, \\ v_2(\varphi) &= A_2 e^{\alpha \varphi} \cos \beta \varphi + B_2 e^{\alpha \varphi} \sin \beta \varphi \\ \text{und} \quad v_3(\varphi) &= A_3 e^{-\alpha \varphi} \cos \beta \varphi + B_3 e^{-\alpha \varphi} \sin \beta \varphi. \end{aligned} \right\} (2.71)$$

Sie können auch in der Form

$$\left. \begin{aligned} v_1(\varphi) &= C_1 \sin n_1(\varphi + d'_1), \\ v_2(\varphi) &= C_2 e^{\alpha(\varphi + d'_2)} \sin \beta(\varphi + d'_2) \\ \text{und} \quad v_3(\varphi) &= C_3 e^{-\alpha(\varphi + d'_3)} \sin \beta(\varphi + d'_3) \end{aligned} \right\} (2.72)$$

geschrieben werden. Ebensogut ist für v_2 und v_3 die Darstellung

$$\left. \begin{aligned} v_2(\varphi) &= C_2 \operatorname{Im} \alpha(\varphi + d'_2) \sin \beta(\varphi + d'_2) \\ \text{und} \quad v_3(\varphi) &= C_3 \operatorname{LoF} \alpha(\varphi + d'_3) \sin \beta(\varphi + d'_3) \end{aligned} \right\} (2.73)$$

möglich.

2.3.3.3 Frequenzbereich III ($17,636 < k < \infty$)

Hier sind die Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$\left. \begin{aligned} p_{1,2} &= \pm i n_1, \\ p_{3,4} &= \pm n_2 \\ \text{und} \quad p_{5,6} &= \pm n_3. \end{aligned} \right\} (2.74)$$

Reelle Lösungsfunktionen sind

$$\left. \begin{aligned} v_1(\varphi) &= A_1 \cos n_1 \varphi + B_1 \sin n_1 \varphi, \\ v_2(\varphi) &= A_2 e^{n_2 \varphi} + B_2 e^{-n_2 \varphi} \\ \text{und} \quad v_3(\varphi) &= A_3 e^{n_3 \varphi} + B_3 e^{-n_3 \varphi}. \end{aligned} \right\} (2.75)$$

Diesem Fundamentalsystem sind die Funktionen

$$\left. \begin{aligned} v_1(\varphi) &= A_1 \cos n_1 \varphi + B_1 \sin n_1 \varphi, \\ v_2(\varphi) &= A_2 \operatorname{LoF} n_2 \varphi + B_2 \operatorname{Im} n_2 \varphi \\ \text{und} \quad v_3(\varphi) &= A_3 \operatorname{LoF} n_3 \varphi + B_3 \operatorname{Im} n_3 \varphi \end{aligned} \right\} (2.76)$$

gleichwertig. Man kann v_2 und v_3 auch zu

$$\left. \begin{aligned} v_2(\varphi) &= C_2 \operatorname{Im} n_2(\varphi + d'_2) \quad \text{bzw.} \quad v_2(\varphi) = C_2 \operatorname{LoF} n_2(\varphi + d'_2) \\ \text{und} \quad v_3(\varphi) &= C_3 \operatorname{Im} n_3(\varphi + d'_3) \quad \text{bzw.} \quad v_3(\varphi) = C_3 \operatorname{LoF} n_3(\varphi + d'_3) \end{aligned} \right\} (2.77)$$

zusammenfassen. Für $k \rightarrow \infty$ gehen die Lösungsfunktionen (2.76) asymptotisch in

$$\begin{aligned}
 v_1(\varphi) &= A_1 \cos \sqrt[4]{k} \varphi + B_1 \sin \sqrt[4]{k} \varphi, \\
 v_2(\varphi) &= A_2 \cos \sqrt[4]{k} \varphi + B_2 \sin \sqrt[4]{k} \varphi \\
 \text{und} \quad v_3(\varphi) &= A_3 \cos \varphi + B_3 \sin \varphi
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} v_1(\varphi) \\ v_2(\varphi) \\ v_3(\varphi) \end{aligned}} \right\} (2.78)$$

über.

2.3.3.4 Grenzfall der Frequenzbereiche I und II

Für den Wert $k = 0,1134$ hat die Gleichung (2.57) außer der Wurzel $p_1 \approx -1,438$ die Doppelwurzel $p_{2,3} \approx -0,28076$. Für die Wurzeln der charakteristischen Gleichung (2.56) folgt daraus

$$\begin{aligned}
 p_{1,2} &= \pm i \cdot n_1 \approx \pm i \cdot 1,199 \\
 \text{und} \quad p_{3,4,5,6} &= \pm i \cdot n_2 \approx \pm i \cdot 0,5298.
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} p_{1,2} \\ p_{3,4,5,6} \end{aligned}} \right\} (2.79)$$

In einem solchen Fall reicht der Exponentialansatz (2.55) nicht aus, um die volle Zahl der linear unabhängigen Lösungen zu ermitteln. Wenn p_m eine Doppelwurzel der charakteristischen Gleichung ist, sind

$$v(\varphi) = e^{p_m \varphi} \quad \text{und} \quad v(\varphi) = \varphi e^{p_m \varphi}$$

Lösungsfunktionen der zugehörigen Differentialgleichung. Im vorliegenden Fall erhalten wir als reelle Lösungsfunktionen

$$\begin{aligned}
 v_1(\varphi) &= A_1 \cos n_1 \varphi + B_1 \sin n_1 \varphi = C_1 \sin n_1 (\varphi + \alpha_1), \\
 v_2(\varphi) &= A_2 \cos n_2 \varphi + B_2 \sin n_2 \varphi = C_2 \sin n_2 (\varphi + \alpha_2) \\
 \text{und} \quad v_3(\varphi) &= A_3 \varphi \cos n_2 \varphi + B_3 \varphi \sin n_2 \varphi = C_3 \varphi \sin n_2 (\varphi + \alpha_3).
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} v_1(\varphi) \\ v_2(\varphi) \\ v_3(\varphi) \end{aligned}} \right\} (2.80)$$

2.3.3.5 Grenzfall der Frequenzbereiche II und III

Für $k = 17,636$ hat Gleichung (2.57) außer der negativen Wurzel p_1 eine reelle Doppelwurzel. Die Wurzeln der charakteristischen Gleichung (2.56) sind in diesem Fall

$$\begin{aligned}
 p_{1,2} &= \pm i \cdot n_1 \approx \pm i \cdot 2,3583 \\
 \text{und} \quad p_{3,4,5,6} &= \pm n_2 \approx \pm 1,33447,
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} p_{1,2} \\ p_{3,4,5,6} \end{aligned}} \right\} (2.81)$$

und das Fundamentalsystem der Differentialgleichung (2.46)

wird gebildet aus den Funktionen

$$\left. \begin{aligned} v_1(\varphi) &= A_1 \cos n_1 \varphi + B_1 \sin n_1 \varphi, \\ v_2(\varphi) &= A_2 e^{n_2 \varphi} + B_2 e^{-n_2 \varphi} \\ \text{und} \quad v_3(\varphi) &= A_3 \varphi e^{n_2 \varphi} + B_3 \varphi e^{-n_2 \varphi}. \end{aligned} \right\} (2.82)$$

An deren Stelle können auch die Funktionen

$$\left. \begin{aligned} v_1(\varphi) &= C_1 \sin n_1(\varphi + \vartheta_1), \\ v_2(\varphi) &= C_2 \sin n_2(\varphi + \vartheta_2) \quad \text{bzw.} \quad v_2(\varphi) = C_2 \cos n_2(\varphi + \vartheta_2) \\ \text{und} \quad v_3(\varphi) &= C_3 \varphi \sin n_2(\varphi + \vartheta_3) \quad \text{bzw.} \quad v_3(\varphi) = C_3 \varphi \cos n_2(\varphi + \vartheta_3) \end{aligned} \right\} (2.83)$$

treten.

3. Untersuchung der kinetischen Biegebeanspruchung

3.1 Allgemeines

Wir erörtern jetzt die Beanspruchungsverhältnisse in einem Stab, der durch Bewegung seiner Enden zu erzwungenen, harmonischen Schwingungen erregt wird.

Hierbei interessiert hauptsächlich die Stelle der höchsten Beanspruchung, d.h. die Stelle des Stabes, an der bei genügend großer Schwingungsamplitude ein Dauerbruch eintritt. Sie soll mit $\hat{\varphi}$ bezeichnet werden.

Die Biege-Normalspannung in der Randfaser ist

$$\sigma(\varphi) = \frac{e}{I} M(\varphi), \quad (3.1)$$

wobei e den Abstand der Randfaser vom Querschnittsschwerpunkt bedeutet. Da der Querschnitt längs der Stabachse konstant ist, ist der Verlauf der Biege-Randspannung bis auf einen konstanten Faktor gleich dem Verlauf des Biegemoments. Wir rechnen der Einfachheit halber mit einem bezogenen Biegemoment \mathcal{M} , das durch

$$\mathcal{M}(\varphi) = \frac{a^2}{EI} M(\varphi) = - (v'(\varphi) + v'''(\varphi)) \quad (3.2)$$

definiert ist. Wegen $u = -v'$ gilt auch

$$\mathcal{M}(\varphi) = u(\varphi) + u''(\varphi). \quad (3.3)$$

Bei den hier untersuchten Biegeschwingungen ist also die Summe aus der nullten und der zweiten Ableitung der Radialauslenkung die für die Beanspruchung maßgebende Größe.

Wie aus den Darlegungen des vorigen Kapitels hervorgeht, gilt allgemein folgendes:

Die Schwingungsform eines Kreisbogenstabes, dessen Enden harmonisch bewegt werden, wird beschrieben durch die Tangential-Auslenkungsfunktion

$$v(\varphi) = \sum_{j=1}^6 A_j e^{p_j \varphi} \quad (3.4)$$

und die Radial-Auslenkungsfunktion

$$u(\varphi) = \sum_{j=1}^6 B_j e^{p_j \varphi}, \quad (3.5)$$

wobei die p_j die Wurzeln der charakteristischen Gleichung (2.56) sind.

Umgekehrt stellt jede Überlagerung von 6 Funktionen

$$v_j = A_j e^{p_j \varphi} \quad \text{bzw.} \quad u_j = B_j e^{p_j \varphi} \quad (j=1, \dots, 6)$$

mit beliebigen Faktoren A_j bzw. B_j , deren p_j über die charakteristische Gleichung zusammenhängen, eine mögliche Schwingungsform dar.

Die Biegespannung ist bis auf einen Faktor gegeben durch die Funktion

$$M(\varphi) = u + u'' = \sum_{j=1}^6 D_j e^{p_j \varphi}. \quad (3.6)$$

Demzufolge stellt jede Überlagerung von 6 Funktionen $M_j = D_j e^{p_j \varphi}$, deren p_j Wurzeln der charakteristischen Gleichung sind, eine mögliche Beanspruchungsform dar. Legt man die Konstanten D_j der Biegemomentenfunktion (3.6) fest, dann ergibt sich die zugehörige Schwingungsform sofort eindeutig aus den Gleichungen (3.4) und (3.5), wobei die Konstanten A_j und B_j durch die Ausdrücke

$$A_j = - \frac{D_j}{p_j(1+p_j^2)} \quad (3.7)$$

und

$$B_j = \frac{D_j}{1+p_j^2} \quad (3.8)$$

bestimmt sind.

Aus $v(\varphi)$ erhält man mit Hilfe der Beziehungen, die in der Tabelle auf S.18 zusammengestellt sind, sämtliche Randbedingungen der zugehörigen Schwingungsform.

Die Lösungsfunktionen für das Biegemoment haben je nach Größe des Frequenzparameters k verschiedene reelle Form, und zwar läßt sich das Biegemoment ebenso wie die Tangentialverschiebung v aus einer Überlagerung von je drei reellen Funktionen mit den Koeffizienten D_m und Verschiebungswinkeln d'_m als freien Konstanten darstellen. Diese Funktionen werden in der folgenden Tabelle noch einmal übersichtlich zusammengestellt.

Zusammenstellung der Lösungsfunktionen für das Biegemoment

Frequenzbereich	M_1	M_2	M_3	
I	$\cos n_1(\varphi+d'_1)$	$\cos n_2(\varphi+d'_2)$	$\cos n_3(\varphi+d'_3)$	(3.10)
I/II	$\cos n_1(\varphi+d'_1)$	$\cos n_2(\varphi+d'_2)$	$\varphi \cos n_2(\varphi+d'_3)$	(3.11)
II	$\cos n_1(\varphi+d'_1)$	$\sin \alpha(\varphi+d'_2) \sin \beta(\varphi+d'_2)$	$\cos \alpha(\varphi+d'_3) \sin \beta(\varphi+d'_3)$	(3.12)
II/III	$\cos n_1(\varphi+d'_1)$	$\sin n_2(\varphi+d'_2)$ bzw. $\cos n_2(\varphi+d'_2)$	$\varphi \sin n_2(\varphi+d'_3)$ bzw. $\varphi \cos n_2(\varphi+d'_3)$	(3.13)
III	$\cos n_1(\varphi+d'_1)$	$\sin n_2(\varphi+d'_2)$ bzw. $\cos n_2(\varphi+d'_2)$	$\sin n_3(\varphi+d'_3)$ bzw. $\cos n_3(\varphi+d'_3)$	(3.14)

Die allgemeine Lösung für $M(\varphi)$ ist immer

$$M(\varphi) = \sum_{m=1}^3 D_m M_m. \quad (3.9)$$

Für die folgenden Abschnitte werden noch einige kurze Bezeichnungen eingeführt.

Ein relatives Extremum (z.B. relatives Maximum) einer Funktion liegt an einer Stelle vor, an der die erste Ableitung dieser Funktion verschwindet und die erste von Null verschiedene Ableitung von gerader Ordnung ist.

Unter dem absoluten Maximum in einem bestimmten Intervall wird der größte Wert einer Funktion in dem betrachteten Intervall verstanden. Das absolute Maximum von $M(\varphi)$ soll mit \hat{M} bezeichnet werden.

Die Funktionen

$$M = \sin \alpha \varphi \sin \beta \varphi$$

und $M = \cos \alpha \varphi \sin \beta \varphi$

sollen ebenso wie die Funktionen

$$M = e^{\alpha \varphi} \sin \beta \varphi$$

und $M = e^{-\alpha \varphi} \sin \beta \varphi$

"quasiharmonisch" genannt werden.

Die reellen Zahlen n_m , α und β (vgl. die Tabelle auf S.24) sollen einfachheitshalber immer als "Wellenzahlen" bezeichnet werden, auch wenn die zugehörigen Funktionen nicht periodisch sind.

3.2. Aussagen über die Verteilung der Biegespannung längs der Stabachse bei harmonischer Bewegung der Stabenden

Auf Grund der Eigenschaften der oben zusammengestellten Biege-

momentenfunktionen lassen sich nun einige allgemeine Aussagen über die Verteilung der kinetischen Beanspruchung längs der Stabachse machen. Diese Aussagen werden im folgenden zunächst zusammengestellt und anschließend im einzelnen bewiesen. Die Reihenfolge entspricht dem Fortschreiten vom allgemeinsten Fall (sechs wesentliche Konstanten frei) zu immer spezielleren Fällen.

Sämtliche Aussagen beziehen sich auf harmonisch schwingende Stäbe mit beliebig vorgegebenem Öffnungswinkel $\varphi_E \leq 2\pi$.

Fall a: Sämtliche 6 Randbedingungen und die Frequenz frei wählbar.

Dann gilt:

Satz 1: Ist φ_B eine beliebige Stelle eines Stabes, dann läßt sich die Bewegung der Stabenden auf ∞ viele Arten so wählen, daß das größte Biegemoment bei φ_B auftritt. Bei Überbeanspruchung wird der Stab also bei φ_B brechen.

Fall b: Frequenz vorgegeben, sämtliche Randbedingungen frei wählbar. Frequenzparameter $k < 10^8$.

Dann gelten:

Satz 2: Ist φ_B eine beliebige Stelle eines Stabes und liegt der Frequenzparameter zwischen den Werten $k = 0$ und $k = 48$, dann läßt sich die Bewegung der Stabenden auf ∞ viele Arten so einrichten, daß das größte Biegemoment bei φ_B auftritt.

Satz 3: Ist der Frequenzparameter $k > 58$, dann kann ein Bruch nicht mehr an jeder beliebigen Stelle des Stabes eintreten, sondern nur innerhalb zweier Randzonen der Größe $\Delta\varphi$ einschließlich beider Stabenden. Für $\Delta\varphi$ gilt

$$\Delta\varphi < 3 \frac{\pi}{n_1} ,$$

wobei die von k abhängige Größe n_1 die Wellenzahl der trigonometrischen Lösungsfunktion ist.

Satz 4: Wenn das Produkt aus der Bogenlänge l eines Stabes und der Wurzel aus der Frequenz kleiner

als ein bestimmter Wert ist, nämlich

$$l \sqrt{\omega} < 5\pi \sqrt{ci} = 5\pi \sqrt{\frac{EI}{\rho F}},$$

dann können die Randbedingungen stets auf ∞ viele Arten so gewählt werden, daß ein Bruch an einer beliebig vorgegebenen Stelle φ_B eintritt.

Hierbei bedeuten $c = \sqrt{E/\rho}$ und $i = \sqrt{I/F}$.

Satz 5: Ist das Produkt aus der Bogenlänge l eines Stabes und der Wurzel aus der Frequenz größer als ein bestimmter Wert, nämlich

$$l \sqrt{\omega} > 6\pi \sqrt{ci} = 6\pi \sqrt{\frac{EI}{\rho F}},$$

dann können die Randbedingungen auf keine Weise so eingerichtet werden, daß ein Bruch an einer beliebigen Stelle des Stabes eintritt. Brüche sind nur innerhalb zweier Randzonen oder an den Stabenden selbst möglich.

Für Werte von $l \sqrt{\omega}$, die zwischen $5\pi \sqrt{ci}$ und $6\pi \sqrt{ci}$ liegen, hängt es von der Größe des Frequenzparameters k ab, ob die erwähnten Randzonen die gesamte Stablänge überdecken.

Fall c: Sämtliche Randbedingungen vorgegeben, aber beliebig.

Dann gilt:

Satz 6: Die Stelle der höchsten Beanspruchung konvergiert mit wachsender Frequenz entweder gegen ein Stabende oder alternierend gegen beide, oder sie liegt immer an einem Stabende.

Fall d: Ein Stabende frei (d.h. verschwindende Schnittlasten vorgeschrieben), Randbedingungen am anderen Ende und Frequenz frei wählbar.

Dann gilt:

Satz 7: Ist φ_B eine beliebige Stelle eines Stabes, die nicht mit dem freien Ende zusammenfällt, dann

läßt sich die Bewegung der Stabenden auf ∞ viele Arten so angeben, daß der Stab an der Stelle φ_B bricht.

Fall e: Ein Stabende frei, Frequenz vorgegeben, Randbedingungen am anderen Ende frei wählbar.

v_E , u_E und ψ_E bezeichnen die kinematischen Zustandsgrößen am Einspannende.

Unter den Bedingungen e) gelten:

Satz 8: Es gibt für jede Anregungsfrequenz ∞ viele Verhältnisse $v_E : u_E : \psi_E$, die die größte Beanspruchung an der Einspannstelle hervorrufen.

Satz 9: Ist φ_R irgend ein beliebiger Stabpunkt, so gibt es für jede Anregungsfrequenz ∞ viele Verhältnisse $v_E : u_E : \psi_E$, bei denen die Stelle φ_R spannungsfrei bleibt, so daß auch bei Überbeanspruchung dort kein Bruch auftritt.

Fall f: Ein Stabende frei, Randbedingungen am anderen Ende ($\varphi = \varphi_E$) vorgegeben.

Dann gelten:

Satz 10: Sind die Randbedingungen bei φ_E bis auf einen gemeinsamen Faktor festgelegt, so kann auch bei beliebig wählbarer Frequenz ein Bruch nicht mehr an jeder beliebigen Stelle, sondern nur innerhalb gewisser Bereiche des Stabes erzeugt werden.

Diese Bereiche hängen von der Anregungsart und vom Öffnungswinkel ab.

Satz 11: Sind die Randbedingungen bei φ_E bis auf einen gemeinsamen Faktor festgelegt, dann gibt es ∞ viele diskrete Anregungsfrequenzen, bei denen die Biegespannungen an einer beliebig vorgegebenen Stelle des Stabes verschwinden. Auch bei Überbeanspruchung wird der Stab dort nicht zu Bruch gehen.

3.3 Beweis von Satz 1

Zum Beweis von Satz 1 genügt es, den Frequenzparameter k aus dem Bereich I zu wählen. Dort ist die Momentenfunktion eine Überlagerung der drei unter (3.10) genannten Funktionen. Wählt man nun k so klein, daß $n_3 < 0,5$ ist (siehe Abb.4) und setzt $D_1 = D_2 = 0$, dann liegt die Beanspruchungsfunktion

$$M(\varphi) = D_3 M_3(\varphi) = \cos n_3(\varphi + \vartheta'_3)$$

vor, deren halbe Wellenlänge größer als 2π ist. Diese hat in einem Intervall der Länge $\Delta\varphi = 2\pi$ höchstens einen relativen Extremwert, der dort zugleich betragsmäßig ihr absolutes Maximum ist. Man braucht also nur

$$\vartheta'_3 = -\varphi_B$$

zu machen, dann fällt $\hat{M} = M_3(-\vartheta'_3)$ auf die vorgegebene Stelle φ_B .

3.4 Beweis der Sätze 2 bis 6

Der Beweis von Satz 2 muß in den 3 Frequenzbereichen getrennt geführt werden. Aus der Untersuchung der Verhältnisse im Bereich III ergeben sich dann gleichzeitig die Sätze 3 bis 6.

3.4.1 Bereich I

Zuerst soll gezeigt werden, daß es bei irgendeiner vorgegebenen Frequenz aus dem Bereich I immer möglich ist, das absolute Beanspruchungsmaximum durch geeignete Wahl der in (3.6) enthaltenen Konstanten auf eine beliebig vorgegebene Stelle zu legen. Dazu genügt es, die Funktion

$$M_4(\varphi) = \cos n_2(\varphi + \vartheta') + \cos n_3(\varphi + \vartheta')$$

zu benutzen. Nach den Additionstheoremen gilt ja

$$M_4(\varphi) = 2 \cdot \cos \bar{n}_1(\varphi + \vartheta') \cdot \cos \bar{n}_2(\varphi + \vartheta')$$

mit
$$\bar{n}_1 = \frac{n_2 + n_3}{2}$$

und
$$\bar{n}_2 = \frac{n_2 - n_3}{2}$$

Die Wellenzahlen \bar{n}_1 und \bar{n}_2 haben den in Abb.5 gezeigten Verlauf, wenn der Frequenzparameter k den Bereich I durchläuft.

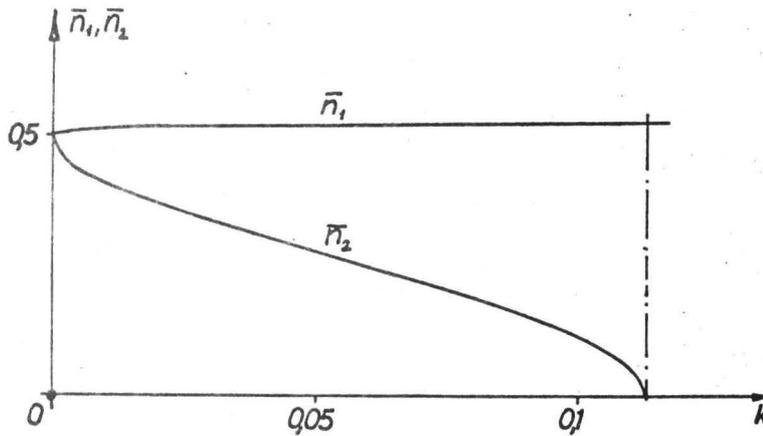


Abb. 5

Für alle $k > 0$ ist $\bar{n}_2 < 0,5$, so daß der Abstand zweier Extremwerte der Funktion

$$\cos \bar{n}_2 (\varphi + \delta^p)$$

immer größer als 2π ist. Das bei $\varphi = -\delta^p$ gelegene relative Maximum von M_4 ist daher in dem Intervall

$$-\pi \leq \varphi + \delta^p \leq \pi$$

zugleich das absolute Maximum von $|M_4|$. Um bei einem Stab vom Öffnungswinkel $\varphi_E \leq 2\pi$ das absolute Beanspruchungsmaximum auf die Stelle φ_B zu legen, braucht man also nur

$$\delta^p = -\varphi_B$$

zu machen.

3.4.2 Bereich II

In diesem Frequenzbereich lassen sich alle möglichen Beanspruchungsverläufe durch Linearkombination der drei unter (3.12) zusammengestellten Funktionen (siehe Tabelle S.31) darstellen.

In Abb.6 ist der typische Verlauf der Funktionen

$$M_2(\varphi) = \sin \alpha \varphi \sin \beta \varphi$$

und

$$M_3(\varphi) = \cos \alpha \varphi \sin \beta \varphi$$

skizziert.

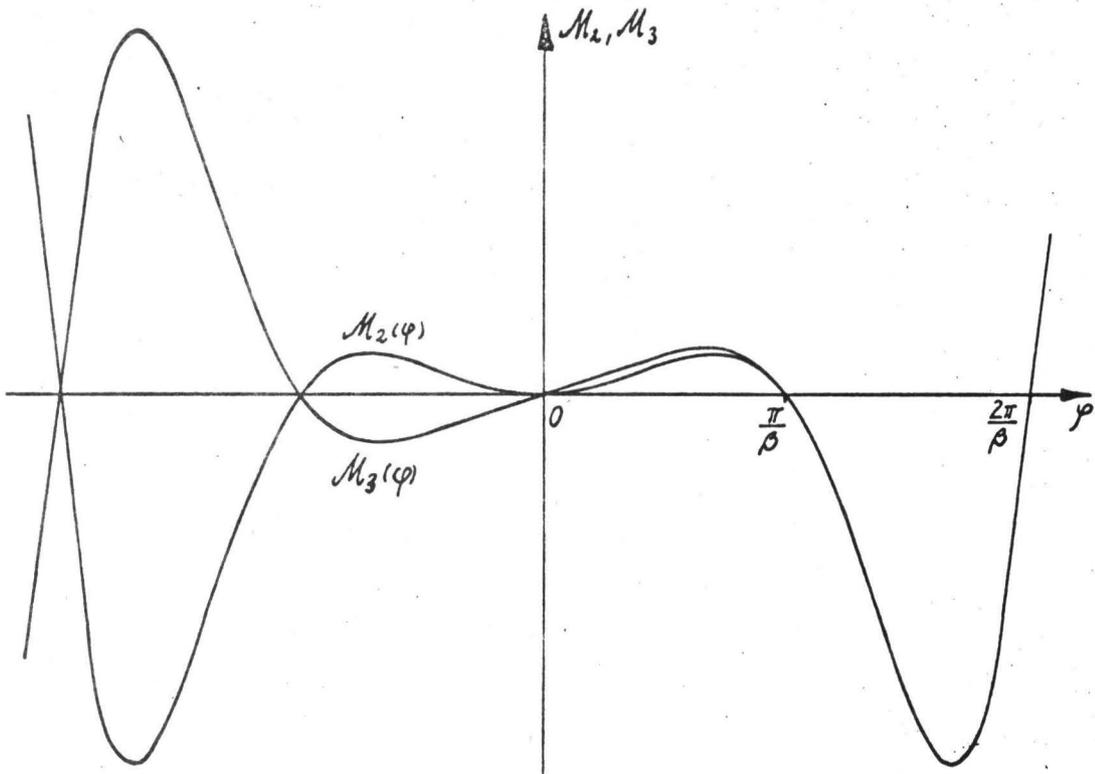


Abb. 6

M_2 ist eine gerade Funktion und berührt bei $\varphi = 0$ die φ -Achse. Die Nulldurchgänge liegen bei

$$\varphi_{02,j} = j \frac{\pi}{\beta} \quad (j = 1, 2, 3, \dots)$$

Für die Stellen der zwischen 2 Nulldurchgängen gelegenen Extremwerte gilt näherungsweise

$$\varphi_{\text{extr},2,j} = \frac{1}{\beta} \left(-\arctg \frac{\beta}{\alpha} \pm j\pi \right)$$

Mit wachsendem Frequenzparameter k nimmt der Abstand

$$\Delta\varphi = \varphi_{02,j} - \varphi_{\text{extr},2,j} = \frac{1}{\beta} \arctg \frac{\beta}{\alpha}$$

von $\frac{\pi}{2 \cdot 0,5299} \approx 2,962$ auf $\frac{1}{1,335} \approx 0,7491$ ab.

Das Verhältnis zweier aufeinanderfolgender Extremwerte von M_2 ist angenähert

$$\left| \frac{M_{\text{extr},j+1}}{M_{\text{extr},j}} \right| \approx e^{\frac{\alpha}{\beta} \pi}$$

\mathcal{M}_3 ist eine ungerade Funktion und schneidet bei $\varphi = 0$ die φ -Achse mit der Steigung β . Die Nulldurchgänge von \mathcal{M}_3 liegen exakt, die Extremwerte näherungsweise an denselben Stellen wie die von \mathcal{M}_2 . Für genügend große φ -Werte (etwa $|\varphi| > \frac{\pi}{\beta}$) verläuft $|\mathcal{M}_3|$ praktisch genau so wie $|\mathcal{M}_2|$ (siehe Abb. 6).

Es soll nun gezeigt werden, daß es für jeden Frequenzparameter k aus dem Bereich II möglich ist, bei Stäben mit Öffnungswinkeln bis $\varphi_E = 2\pi$ den Bruch an eine beliebig vorgegebene Stelle φ_B zu legen.

Zu diesem Zweck genügt es, eine Beanspruchungsfunktion \mathcal{M} zu konstruieren, die in einem Intervall der Länge $\Delta\varphi_{ges} > 3\pi$ ein absolutes Maximum $\hat{\mathcal{M}}$ besitzt, das um $\Delta\varphi_r > \pi$ von dem einen Rand und um $\Delta\varphi_l > 2\pi$ vom anderen Rand des Intervalls entfernt ist. Eine solche Funktion ist zur Veranschaulichung in Abb. 7 skizziert.

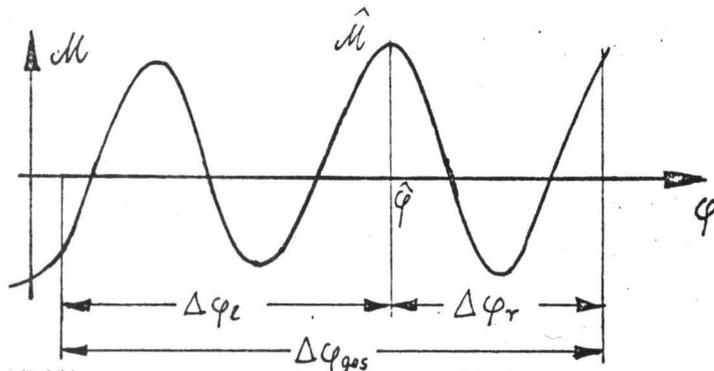


Abb. 7

Wenn \mathcal{M} im Argument einen willkürlich wählbaren Verschiebungswinkel \mathcal{A} enthält, kann man diese Funktion gegenüber einem Stabintervall der Länge $\Delta\varphi_{St} \leq 2\pi$ so verschieben, daß das absolute Maximum an jeder Stelle der rechten Hälfte des Stabintervalls liegen kann. Da die Stabenden vertauschbar sind, gilt dies dann auch für das gesamte Stabintervall.

Es erweist sich als zweckmäßig, den Frequenzbereich II in drei Unterabschnitte aufzuteilen. Für jeden dieser Unterabschnitte läßt sich dann eine Beanspruchungsfunktion mit den eben genannten Eigenschaften angeben.

Wir wollen nun den Abstand zwischen zwei Nullstellen der trigonometrischen Funktion \mathcal{M}_1 mit

$$L_1 = \frac{\pi}{n_1}$$

und den Abstand zwischen zwei Nullstellen der quasiharmonischen Funktion \mathcal{M}_2 bzw. \mathcal{M}_3 mit

$$L_2 = \frac{\pi}{\beta}$$

bezeichnen. Die erwähnten Unterbereiche ergeben sich dann dadurch, daß in ihnen das Verhältnis $L_2/L_1 = n_1/\beta$ innerhalb bestimmter Grenzen liegt. L_2/L_1 kann im Frequenzbereich II Werte zwischen 2.26 und ∞ annehmen. Der Verlauf dieses Verhältnisses als Funktion des Frequenzparameters k ist in Abb. 8 aufgetragen, und es sind dort gleichzeitig die Grenzen der gewählten Unterbereiche eingezeichnet.

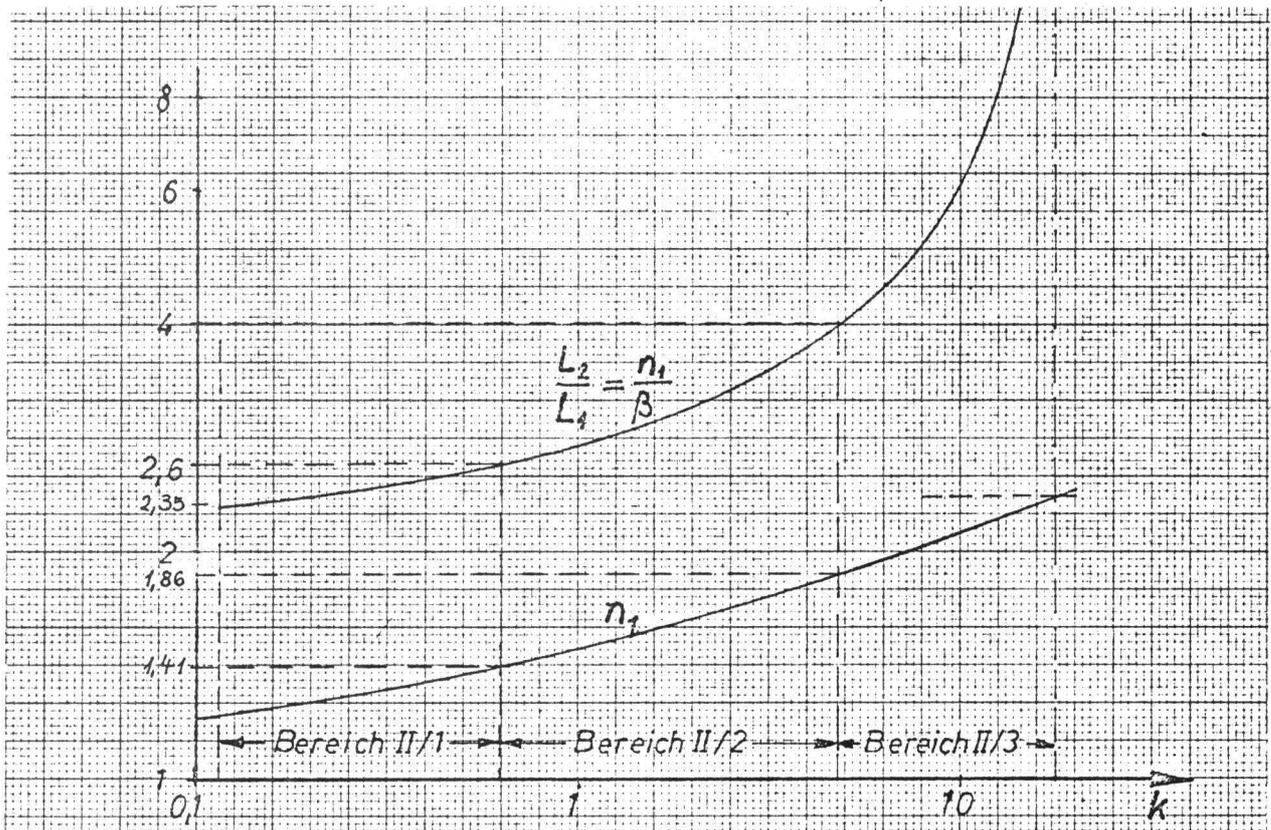


Abb. 8

1.) Unterbereich II/1 ($0,1134 \leq k \leq 0,6018$)

Dieser Bereich wird so gewählt, daß

$$L_2 \leq 2,6 L_1 \tag{3.15}$$

ist. Aus dieser Forderung ergeben sich die oben angegebenen Grenzen für k . Durch Überlagerung von \mathcal{M}_1 und \mathcal{M}_2 bilden wir

die Momentenfunktion

$$M_4 = M_1 - D_2 M_2 = \cos n_1(\varphi + \sigma_1) - D_2 \sin \alpha(\varphi + \sigma_2) \sin \beta(\varphi + \sigma_2) \quad (3.16)$$

wobei σ_2 willkürlich ist und die Konstanten D_2 und σ_1 so bestimmt werden, wie es im folgenden erklärt wird.

In Abb.9 sind M_1 und $D_2 M_2$ skizziert; die Differenzkurve M_4 ist dort durch senkrechte Schraffur angedeutet. Entsprechend dieser Abbildung soll durch geeignete Wahl von $\sigma_1 - \sigma_2$ die Funktion M_1 gegenüber M_2 so verschoben werden, daß das mit $M_{1\max}$ bezeichnete relative Maximum der trigonometrischen Funktion um einen kleinen Betrag links vom Nulldurchgang von M_2 liegt. Die Konstante D_2 soll so gewählt werden, daß die Differenzfunktion M_4 an der in Abb.9 mit φ_{01} bezeichneten Nullstelle von M_1 den Wert $M_4(\varphi_{01}) = -1$ annimmt, d.h., D_2 soll die Größe

$$D_2 = \frac{1}{M_2(\varphi_{01})}$$

haben.

Aus Abb.9 ersieht man nun anschaulich, daß der mit \hat{M} bezeichnete Funktionswert von M_4 innerhalb eines Intervalls der Länge

$$\Delta\varphi_{\text{ges}} = \Delta\varphi_l + \Delta\varphi_r$$

dem Betrage nach das absolute Maximum von $|M_4|$ darstellt.

Der Abstand von \hat{M} bis zur linken Grenze des betrachteten Intervalls beträgt

$$\Delta\varphi_l \approx 3,5 \frac{\pi}{n_1},$$

der bis zur rechten Grenze

$$\Delta\varphi_r \approx 2,5 \frac{\pi}{n_1}.$$

Da innerhalb des Unterbereichs II/1 die Wellenzahl $n_1 < 1,4$ ist (siehe Abb.8), haben die angegebenen Abstände mindestens die Größe

$$\Delta\varphi_l = 2,5 \pi > 2 \pi$$

bzw.

$$\Delta\varphi_r = 1,43 \pi > \pi,$$

und es ist ersichtlich, daß M_4 eine Beanspruchungsfunktion mit den gewünschten Eigenschaften ist; denn durch Variation von σ_2 läßt sich M_4 längs der φ -Achse beliebig verschieben.

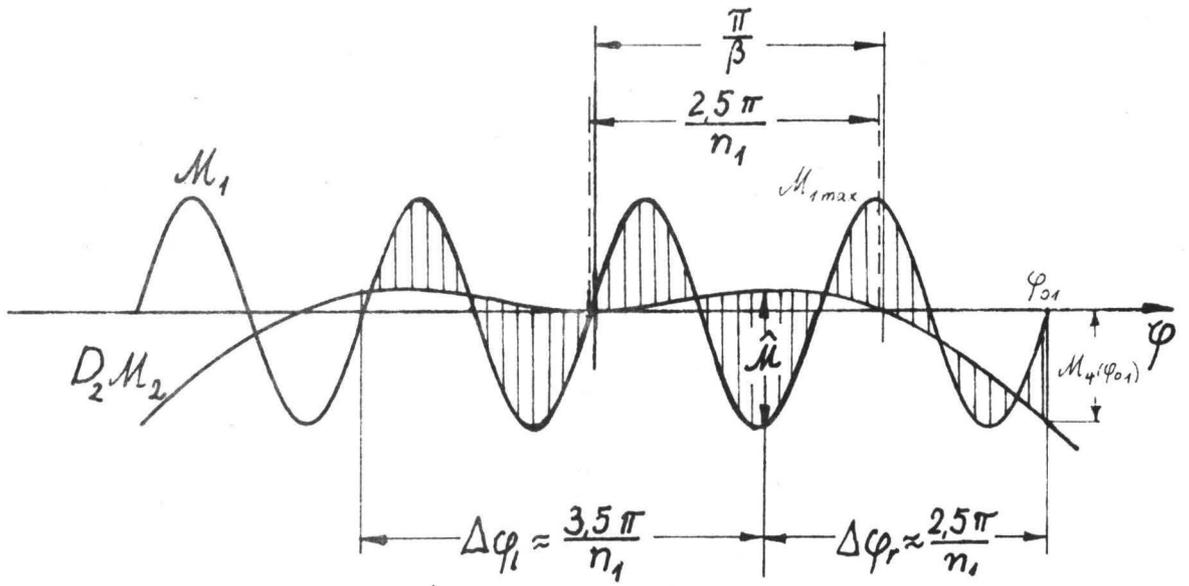


Abb. 9

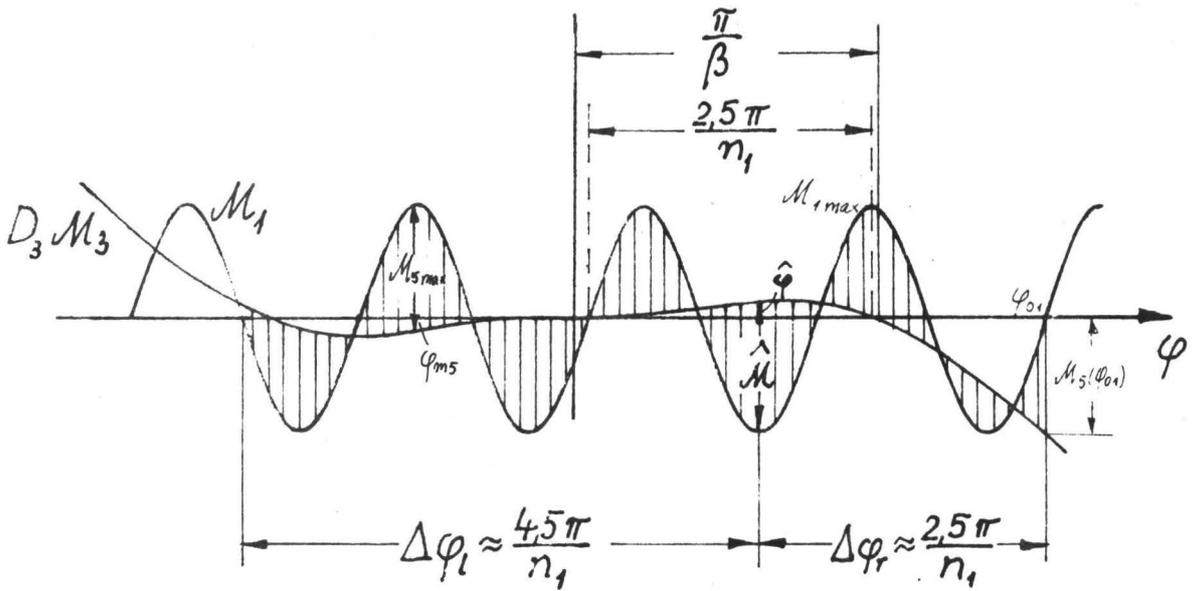


Abb. 10

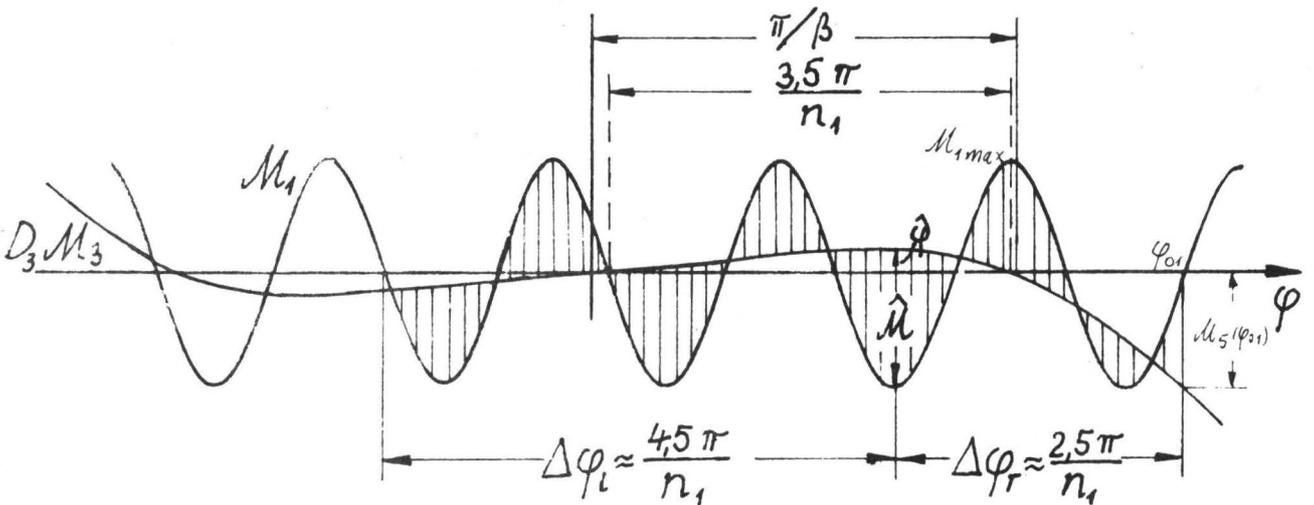


Abb. 11

2.) Unterbereich II/2 ($0,6018 < k < 4,729$)

Dieser Bereich wird durch die Bedingung

$$2,6 L_1 \leq L_2 \leq 4 L_1 \quad (3.17)$$

abgegrenzt.

Hier überlagern wir M_1 mit M_3 und konstruieren die Momentenfunktion

$$M_5 = M_1 - D_3 M_3 = \cos n_1(\varphi + \alpha_1) - D_3 \cos(\alpha \varphi + \alpha_3) \sin \beta (\varphi + \alpha_3) \quad (3.18)$$

mit willkürlichem Verschiebungswinkel α_3 . Die Bestimmung der Konstanten D_3 und α_1 wird anschließend anhand der Abbildungen 10 und 11 erklärt.

In diesen Abbildungen sind jeweils M_1 und $D_3 M_3$ dargestellt, in Abb.10 für einen k - Wert an der unteren Grenze des Bereichs II/2 (d.h. $L_2 \approx 2,6 L_1$) und in Abb.11 für einen Fall an der oberen Grenze dieses Bereichs (d.h. $L_2 \approx 4 L_1$). Hierbei soll M_1 gegenüber $D_3 M_3$ wieder so verschoben sein, daß das Maximum M_{1max} kurz vor den Nulldurchgang von M_3 fällt, und die Konstante D_3 soll so gewählt werden, daß M_5 an der mit φ_{01} bezeichneten Nullstelle von M_1 den Wert $M_5(\varphi_{01}) = -1$ annimmt.

Der Unterbereich II/2 wurde so gewählt, daß in ihm $L_2 > 2,5 L_1$ ist. Dann ist nämlich in Abb.10 die Stelle $\hat{\varphi}$ des relativen Extremums \hat{M} weiter vom Ursprung der quasiharmonischen Funktion M_3 entfernt als die Stelle φ_{m5} des mit M_{5max} bezeichneten Maximums, und der Funktionswert von M_3 an der Stelle $\hat{\varphi}$ ist betragsmäßig größer als derjenige an der Stelle φ_{m5} . Demnach ist auch

$$|\hat{M}| > |M_{5max}|.$$

Aus den Diagrammen 10 und 11 ersieht man nun anschaulich, daß $|\hat{M}|$ das absolute Maximum von $|M_5|$ im Intervall $\Delta\varphi_{ges} = \Delta\varphi_r + \Delta\varphi_i$ ist, und daß

$$\Delta\varphi_r \approx 2,5 \frac{\pi}{n_1}$$

und

$$\Delta\varphi_i \approx 4,5 \frac{\pi}{n_1}$$

ist. Wie aus Abb.8 ersichtlich ist, nimmt die Wellenzahl n_1 im Bereich II/2 höchstens den Wert $n_1 = 1,86$ an. Infolgedessen

haben die Abstände $\Delta\varphi_r$ und $\Delta\varphi_l$ mindestens die Größe

$$\Delta\varphi_r = 1,34\pi > \pi$$

$$\Delta\varphi_l = 2,42\pi > 2\pi.$$

und

Auf Grund der Überlegungen auf S.39 Mitte ist damit gezeigt, daß auch im Bereich II/2 jede Stelle eines Stabes mit einem Öffnungswinkel $\varphi_E \leq 2\pi$ zur Bruchstelle gemacht werden kann.

3.) Unterbereich II/3 ($4,729 \leq k < 17,636$)

Für Frequenzen aus diesem Bereich gilt

$$L_2 \geq 4 L_1 \quad (3.19)$$

Hier können wir dieselbe Momentenfunktion $\mathcal{M}_5(\varphi)$ wie im Unterbereich II/2 verwenden. Jetzt ist jedoch der Abstand von $\hat{\varphi}$ bis zum linken Rand desjenigen Intervalls, in dem $|\mathcal{M}|$ das absolute Maximum ist, um $2 L_1$ größer als im Bereich II/2.

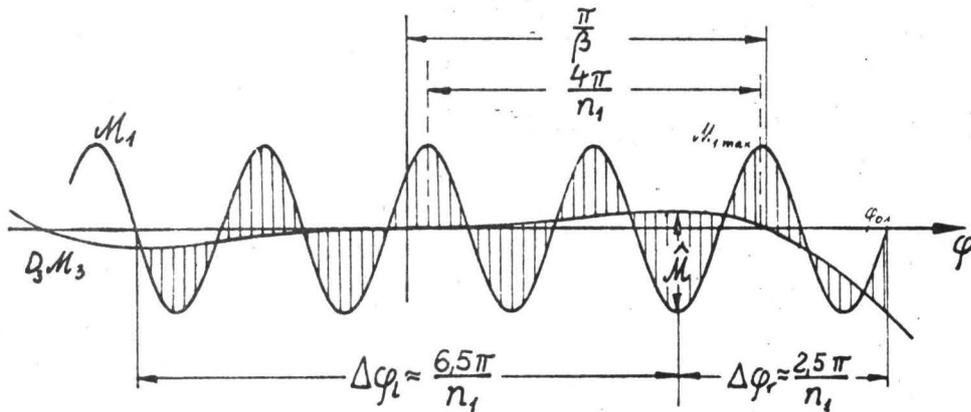


Abb. 12

Aus Abb.12 ersieht man, daß

$$\Delta\varphi_l \approx 6,5 \frac{\pi}{n_1}$$

ist, und da im Bereich II/3

$$n_1 \leq 2,35$$

ist, gilt

$$\Delta\varphi_l \geq 2,76\pi > 2\pi$$

und

$$\Delta\varphi_r \geq 1,06\pi > \pi.$$

Damit ist für den gesamten Frequenzbereich II bewiesen, daß bei jeder vorgegebenen Frequenz die Randbedingungen so eingerichtet werden können, daß ein Bruch an jeder Stelle eines Stabes mit einem Öffnungswinkel $\varphi_E \leq 2\pi$ erzeugt werden kann.

3.4.3 Bereich III

Mit wachsender Frequenz wird die Wellenlänge der trigonometrischen Lösungsfunktion \mathcal{M}_1 (siehe Gleichungen (3.14)) immer kürzer, während die beiden hyperbolischen Lösungsfunktionen zu einem oder zu beiden Enden des Stabintervalls hin stark ansteigen. Wenn genügend viele Perioden von \mathcal{M}_1 auf die Stablänge entfallen, sind die relativen Extrema in der Nähe eines oder beider Stabenden betragsmäßig immer größer als die in der Stabmitte. Dabei wollen wir von dem Fall absehen, daß der Momentenverlauf einzig und allein durch \mathcal{M}_1 dargestellt wird, weil dann an mehreren Punkten des Stabes gleich hohe Beanspruchungen herrschen.

Wird eine Anregungsfrequenz aus dem Bereich III vorgegeben, dann ist es für einen Stab mit einem beliebig vorgegebenen Öffnungswinkel im allgemeinen nicht möglich, die harmonische Bewegung der Stabenden so einzurichten, daß ein Bruch an einer beliebig vorgegebenen Stelle φ_B eintritt. Vielmehr können Brüche nur innerhalb gewisser Randbereiche auftreten, die von beiden Stabenden ausgehen.

Um anzugeben, wie groß die erwähnten Winkelbereiche höchstens sein können, wollen wir eine Beanspruchungsfunktion konstruieren, deren absolutes Maximum möglichst weit vom Ende des Stabintervalls entfernt ist.

Im Frequenzbereich III stehen dazu die trigonometrische Funktion

$$\mathcal{M}_1 = \cos n_1 (\varphi + \varphi_1)$$

und die Exponentialfunktionen

$$\mathcal{M} = e^{n_2 \varphi}, \mathcal{M} = e^{-n_2 \varphi}, \mathcal{M} = e^{n_3 \varphi} \quad \text{und} \quad \mathcal{M} = e^{-n_3 \varphi}$$

zur Verfügung. Wenn das absolute Maximum einer Linearkombination dieser Funktionen möglichst weit vom Rand des betrachteten Intervalls entfernt sein soll, müssen die Koeffizienten der Exponentialfunktionen sehr klein gemacht werden. Dann machen sich die ansteigenden Funktionen erst bei großen Argumentwerten bemerkbar, während die abklingenden Funktionen dort praktisch Null sind. In der Nähe des rechten Randes eines genügend langen Intervalls spielen also außer $\mathcal{M}_1(\varphi)$ nur

$$\mathcal{M}_2(\varphi) = e^{n_2 \varphi} \quad \text{und} \quad \mathcal{M}_3(\varphi) = e^{-n_3 \varphi}$$

eine Rolle.

Wenn \mathcal{M}_1 mit einer monoton ansteigenden Funktion ohne Vorzeichenwechsel superponiert wird - wie es in Abb.13 skizziert ist -, ist der Abstand vom größten relativen Extremum $\hat{\mathcal{M}}$ bis zum rechten Rand desjenigen Intervalls, in dem $\hat{\mathcal{M}}$ dem Betrage nach das absolute Maximum darstellt, immer kleiner als $2\pi/n_1$.

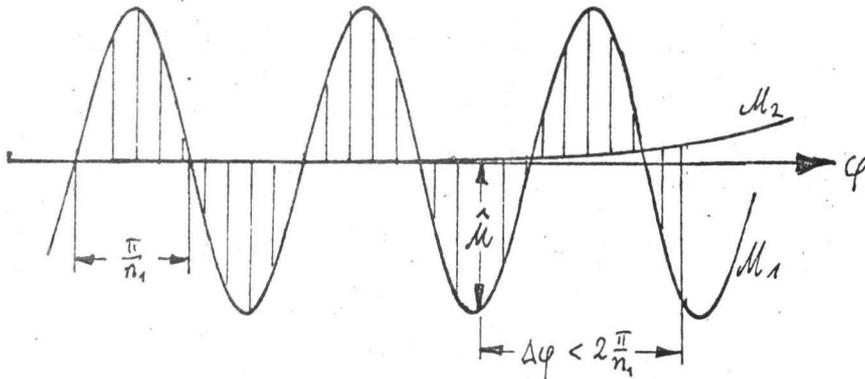


Abb. 13

Der eben erwähnte Abstand kann jedoch vergrößert werden, wenn man \mathcal{M}_1 mit einer Funktion \mathcal{M}_4 überlagert, die aus $\mathcal{M}_2 = e^{n_2\varphi}$ und $\mathcal{M}_3 = e^{n_3\varphi}$ so gebildet wird, daß sie einen Vorzeichenwechsel hat. Diese Funktion lautet

$$\mathcal{M}_4(\varphi) = D_2 e^{n_2\varphi} - D_3 e^{n_3\varphi}, \quad (3.20)$$

wobei die zunächst noch willkürlichen Koeffizienten D_2 und D_3 gleiches Vorzeichen haben müssen, wenn $n_2 > n_3$ ist. Dies ist nach Abb.4 der Fall.

Um zu zeigen, daß man die Funktion \mathcal{M}_4 durch geeignete Wahl der Koeffizienten D_2 und D_3 längs der φ -Achse beliebig verschieben kann, schreiben wir sie unter Benutzung der Abkürzungen

$$D_4 = D_3 e^{-n_3 d_4} \quad \text{und} \quad C = \frac{D_2}{D_3} e^{(n_3 - n_2) d_4} \quad (3.21)$$

in die Form

$$\mathcal{M}_4(\varphi) = D_4 (C e^{n_2(\varphi + d_4)} - e^{n_3(\varphi + d_4)}) = D_4 \bar{\mathcal{M}}_4 \quad (3.22)$$

um, in der jetzt D_4 und d_4 als willkürlich wählbare Konstanten auftreten.

Wir wollen zunächst die wichtigsten Merkmale der Funktion \mathcal{M}_4 kurz diskutieren, wobei $d_4 = 0$ gesetzt werden soll. Ihr typischer Verlauf ist in Abb.14 skizziert.

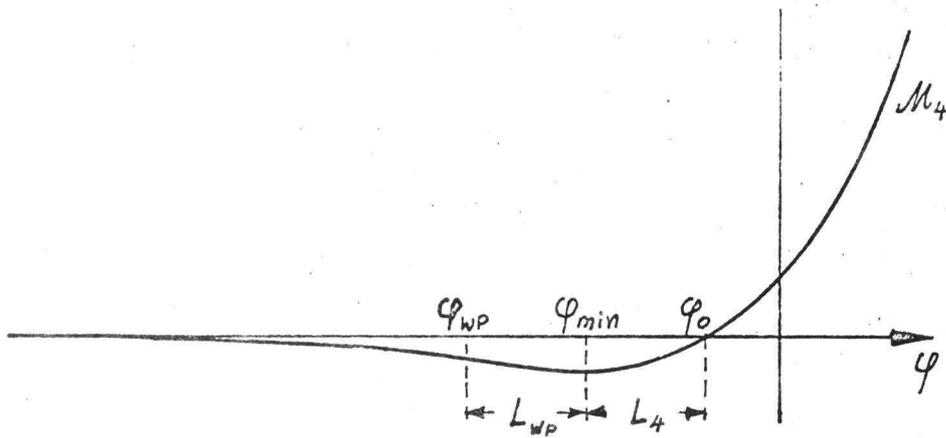


Abb. 14

M_4 hat einen Nulldurchgang bei

$$\varphi_0 = - \frac{\ln C}{n_2 - n_3} \quad (3.23)$$

ein relatives Minimum bei

$$\varphi_{min} = - \frac{1}{n_2 - n_3} \left(\ln C + \ln \frac{n_2}{n_3} \right) \quad (3.24)$$

einen Wendepunkt bei

$$\varphi_{WP} = - \frac{1}{n_2 - n_3} \left(\ln C + 2 \ln \frac{n_2}{n_3} \right) \quad (3.25)$$

und $|M_4|$ nähert sich für $\varphi \rightarrow -\infty$ monoton fallend dem Wert Null.

Der Abstand L_4 zwischen dem Nulldurchgang und dem Minimum ist ebenso groß wie der Abstand L_{WP} zwischen dem Minimum und dem Wendepunkt und beträgt

$$L_4 = \varphi_0 - \varphi_{min} = \frac{\ln \frac{n_2}{n_3}}{n_2 - n_3} \quad (3.26)$$

Durch Überlagerung von M_4 und M_1 konstruieren wir nun die Biegemomentenfunktion

$$M_5 = M_1 - M_4 = \cos n_1(\varphi + d_1) - D_4 \left[C e^{n_2(\varphi + d_4)} - e^{n_3(\varphi + d_4)} \right] \quad (3.27)$$

wobei die Konstanten D_4 und d_4 so bestimmt werden sollen, wie es weiter unten anhand von Abb.16 beschrieben wird.

Für die Gestalt dieser Funktion ist das Verhältnis von L_4 (siehe Gleichung (3.26)) zum Abstand

$$L_1 = \pi / n_1 \quad (3.28)$$

zwischen zwei Nullstellen der trigonometrischen Funktion von

Bedeutung. Die Größe von

$$\frac{L_4}{L_1} = \frac{n_1}{\pi} \frac{\ln \frac{n_2}{n_3}}{n_2 - n_3} \quad (3.29)$$

ist in Abb.15 über dem Frequenzparameter aufgetragen. Für große Werte von k gilt auf Grund von Gleichung (2.66) näherungsweise

$$\frac{L_4}{L_1} = \frac{\sqrt[4]{k}}{\pi} \frac{\ln \sqrt[4]{k}}{\sqrt[4]{k} - 1} \quad (3.30)$$

und

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{L_4}{L_1} = \frac{\ln k}{4\pi} \quad (3.31)$$

Aus Abb.15 ersieht man, daß für $k < 10^8$

$$L_4 < 1,5 L_1 \quad (3.32)$$

ist.

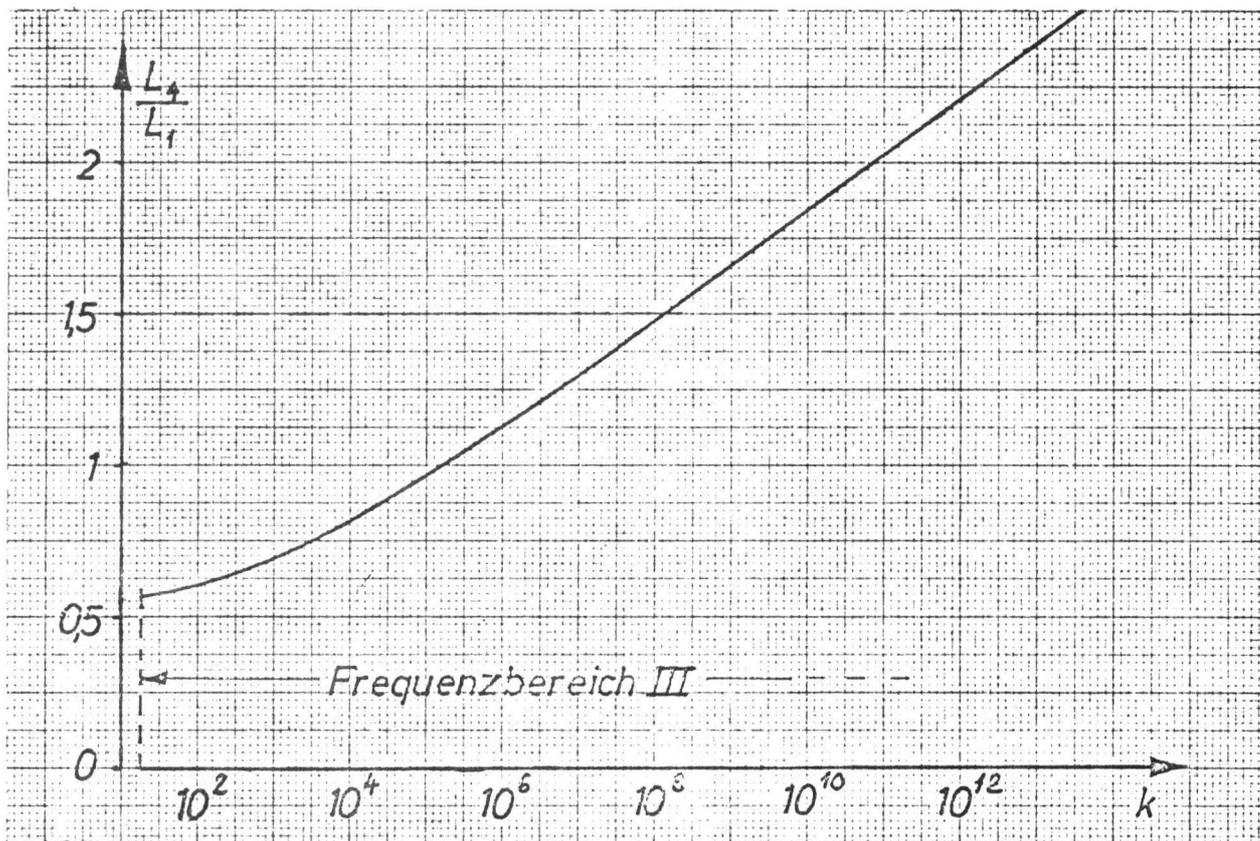


Abb. 15

Wir wollen nun durch Superposition von M_1 und M_4 gemäß Gleichung (3.27) einen Momentenverlauf konstruieren, dessen absolutes Maximum möglichst weit vom rechten Rand des betrachteten Intervalls entfernt liegt.

relativen Extrema gleiche Beträge haben.

Solange der Frequenzparameter $k < 10^8$ und damit $L_4 < 1,5 L_1$ ist, ist die obere Grenze für den Abstand $\Delta\varphi$ durch

$$\Delta\varphi_2 = 3 \frac{\pi}{n_1} - \varepsilon \quad (3.36)$$

gegeben, wobei ε eine kleine Größe darstellen soll. Als erreichbaren Wert kann man z.B.

$$\Delta\varphi_3 = 2,9 \frac{\pi}{n_1} \quad (3.37)$$

angeben.

Die so konstruierte Momentenfunktion kann man nur durch Variation des Winkels φ_q (in Gleichung (3.27)) gegenüber einem Stabintervall so verschieben, daß das absolute Beanspruchungsmaximum \hat{M} an jeder Stelle innerhalb eines Bereiches $\Delta\varphi_2$ (Gleichung (3.36)) vom rechten Stabende aus liegen kann.

Da die Stabenden vertauschbar sind, ergeben sich unter der Voraussetzung (3.34) hieraus die folgenden Aussagen:

- a) Bei vorgegebener Frequenz ist es möglich, die Randbedingungen so zu wählen, daß die größte Beanspruchung an jeder beliebigen Stelle innerhalb zweier Randzonen der Größe $\Delta\varphi_3 = 2,9 \frac{\pi}{n_1}$ von beiden Stabenden aus auftritt. Weiter als $\Delta\varphi_1 = 3 \frac{\pi}{n_1}$ kann die Stelle der maximalen Beanspruchung vom Stabende nicht entfernt sein.

Auf Grund der Abhängigkeit der Wellenzahl n_1 vom Frequenzparameter k (siehe Abb.4) kann man auch angeben, bei welchen Werten von k die Winkelbereiche $\Delta\varphi_3$ bzw. $\Delta\varphi_1$ gerade die Größe π annehmen und die oben erwähnten Randzonen somit das maximale Stabintervall überdecken. Für $k < 48$ ist $n_1 < 2,9$, und für $k > 58$ ist $n_1 > 3$. Daher gilt auf Grund von Aussage a) auch folgendes:

- b) Für Frequenzparameter unterhalb $k = 48$ kann bei Stäben mit beliebigem Öffnungswinkel $\varphi_E \leq 2\pi$ ein Bruch an jeder Stabstelle auftreten. Bei Frequenzparametern oberhalb $k = 58$ können Brüche nur innerhalb zweier Randzonen auftreten, deren Größe mit wachsender Frequenz abnimmt.

- c) Bei vorgegebener Frequenz kann bei Stäben vom Öffnungswinkel

$$\varphi_E < 2 \Delta \varphi_3 = 5,8 \frac{\pi}{n_1} \quad (3.38)$$

ein Bruch an jeder beliebigen Stelle des Stabes erzeugt werden.

Durch eine Abschätzung können wir in Gleichung (3.38) zunächst n_1 durch k ersetzen.

Da im gesamten Bereich III (siehe Abb.4)

$$n_1 < 1,15 \sqrt[4]{k} \quad (3.39)$$

ist, gilt Aussage c) auch für

$$\varphi_E < \frac{5,8 \pi}{1,15 \sqrt[4]{k}} = 5,05 \frac{\pi}{\sqrt[4]{k}}$$

bzw. für

$$\varphi_E < 5 \frac{\pi}{\sqrt[4]{k}} ; \quad (3.40)$$

denn wir ersetzen $2 \Delta \varphi_3$ durch immer kleinere Ausdrücke,

Weiterhin können wir nun k durch die Anregungsfrequenz und die Daten des Stabes ausdrücken. Setzen wir

$$k = \frac{a^4}{c^2 i^2} \omega^2 \quad (3.41)$$

in die Bedingung (3.40) ein, dann geht sie über in

$$a \varphi_E \sqrt{\omega} < 5 \pi \sqrt{c i} . \quad (3.42)$$

- d) Bei Stäben vom Öffnungswinkel

$$\varphi_E > 2 \Delta \varphi_1 = 6 \frac{\pi}{n_1} \quad (3.43)$$

ist es durch keine Randbedingung möglich, einen Bruch an jeder beliebigen Stelle zu erzeugen.

Da im gesamten Frequenzbereich III

$$n_1 > \sqrt[4]{k} \quad (3.44)$$

ist (vgl. (3.65)), gilt derselbe Satz auch für

$$\varphi_E > 6 \frac{\pi}{\sqrt[4]{k}} , \quad (3.45)$$

und mit (3.41) geht Bedingung (3.45) über in

$$a \varphi_E \sqrt{\omega} > 6 \pi \sqrt{c i} . \quad (3.46)$$

Damit sind die Sätze 2 bis 5 für $k < 10^8$ bewiesen.

Nur wenn $k > 10^8$ ist, ist das in Gleichung (3.29) definierte Verhältnis $L_4/L_1 > 1,5$, und zwar ist nach Abb.15

$$1,5 < \frac{L_4}{L_1} < 2,5 \text{ für } 10^8 < k < 10^{13}. \quad (3.47)$$

In diesem Falle kann in Abb.16 das bei φ_{ms} gelegenen relative Extremum dem Betrage nach größer sein als \hat{M} und damit für $\varphi < \varphi_{Rand}$ das absolute Maximum von $|M_5|$ darstellen. Man entnimmt aus der Abb.16, daß der Abstand

$$\Delta\varphi_5 = \varphi_{Rand} - \varphi_{ms} \quad (3.48)$$

höchstens die Größe

$$\Delta\varphi_6 = 5 \frac{\pi}{n_1} - \varepsilon \quad (3.49)$$

haben kann. Dann können Brüche also in einer Randzone der Größe $\Delta\varphi_6$ auftreten.

Dieser Fall tritt aber erst für verhältnismäßig große Werte des Frequenzparameters ein. Wenn die hier zugrundeliegende einfache Biegetheorie Gültigkeit haben soll, muß auf Grund der Bedingung $k \ll f$ (siehe S.15) der Stab extrem schlank sein. Es muß nämlich das Verhältnis des Krümmungsradius a zum Trägheitsradius i des Querschnitts in der Größenordnung

$$\frac{a}{i} = 10^5$$

liegen. Solche Fälle haben aber keine praktische Bedeutung.

Bei wirklichen Stäben können wir uns also auf den Bereich $k < 10^8$ beschränken, in dem die in den Sätzen 2 bis 5 niedergelegten Beziehungen gelten.

S a t z 6 ist eine Folge der Aussage, daß (für $k < 10^8$) Dauerbrüche nur innerhalb zweier Randzonen der Breite $\Delta\varphi < 3\frac{\pi}{n_1}$ einschließl. beider Stabenden auftreten können; denn n_1 steigt mit wachsender Frequenz monoton an. In welcher Weise die Stelle der höchsten Beanspruchung von der Frequenz abhängt, richtet sich nach den vorgegebenen Randbedingungen und nach dem Öffnungswinkel des Stabes. Aber die Randzonen, in denen diese Stelle liegen kann, verengen sich mit wachsender Frequenz immer mehr.

Je nach den Lagerungsbedingungen kann die Bruchstelle natürlich

auch für alle Frequenzen an einem Stabende liegen, wenn nämlich die hyperbolischen Anteile der Beanspruchungsform gegenüber dem trigonometrischen Anteil immer genügend groß sind.

3.5 Beanspruchungsfunktionen einseitig freier Stäbe

Wir gehen nun über zu dem Fall, daß ein Stabende frei ist. An diesem Stabende müssen Biegemoment, Querkraft und Normalkraft verschwinden. Durch diese drei Bedingungen werden von den 6 freien Konstanten der allgemeinen Lösung drei festgelegt.

Alle möglichen Beanspruchungsformen eines einseitig freien Stabes ergeben sich dann aus der Überlagerung von drei Funktionen mit je einem beliebigen Faktor.

Es sollen nun zunächst diese drei Funktionen für die einzelnen Frequenzbereiche angegeben werden.

Wir legen das freie Stabende immer auf den Ursprung ($\varphi = 0$). Dann nehmen die Randbedingungen die Form

$$\left. \begin{aligned} M(0) &= \frac{EI}{\alpha^2} (u(0) + u''(0)) = 0, \\ Q(0) &= \frac{EI}{\alpha^3} (u'(0) + u'''(0)) = 0 \\ \text{und } N(0) &= \frac{EI}{\alpha^3} (u''(0) + u^{IV}(0) - k u(0)) = 0 \end{aligned} \right\} (3.50)$$

an. Für das bezogene Biegemoment M lauten sie

$$\left. \begin{aligned} M(0) &= 0, \\ M'(0) &= 0 \\ \text{und } M''(0) &= k u(0). \end{aligned} \right\} (3.51)$$

3.5.1 Bereich I

Die Funktionen der allgemeinen Lösung lauten für die Radialauslenkung

$$u_m(\varphi) = A_m \sin n_m \varphi + B_m \cos n_m \varphi \quad (m=1,2,3) \quad (3.52)$$

und für das bezogene Biegemoment

$$M_m(\varphi) = a_{Mm} u_m(\varphi), \quad (3.53)$$

wobei die Abkürzung

$$a_{Mm} = 1 - n_m^2 \quad (3.54)$$

eingeführt wurden, n_1 , n_2 und n_3 sind die Wellenzahlen, die sich aus den Wurzeln der charakteristischen Gleichung ergeben. Die Randbedingungen (3.51) ergeben folgendes Gleichungssystem für die 6 Konstanten:

$$\left. \begin{aligned} a_{M_1} B_1 + a_{M_2} B_2 + a_{M_3} B_3 &= 0 \\ a_{Q_1} A_1 + a_{Q_2} A_2 + a_{Q_3} A_3 &= 0 \\ a_{N_1} B_1 + a_{N_2} B_2 + a_{N_3} B_3 &= 0 \end{aligned} \right\} (3.55)$$

mit $a_{Q_m} = n_m (1 - n_m^2)$ und $a_{N_m} = -n_m^2 (1 - n_m^2) - k$ ($m = 1, 2, 3$) $\left. \vphantom{a_{Q_m}} \right\} (3.56)$

Durch diese Gleichungen lassen sich z.B. A_3 , B_2 und B_3 durch die drei anderen Konstanten ausdrücken. Man findet die Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} A_3 &= -\frac{a_{Q_1}}{a_{Q_3}} A_1 - \frac{a_{Q_2}}{a_{Q_3}} A_2, \\ B_2 &= \frac{(a_{M_1} - a_{M_3})(a_{M_1} a_{M_3} - k)}{(a_{M_3} - a_{M_2})(a_{M_2} a_{M_3} - k)} B_1 = \frac{\Delta_2}{\Delta} B_1, \\ \text{und } B_3 &= \frac{(a_{M_2} - a_{M_1})(a_{M_1} a_{M_2} - k)}{(a_{M_3} - a_{M_2})(a_{M_2} a_{M_3} - k)} B_1 = \frac{\Delta_3}{\Delta} B_1. \end{aligned} \right\} (3.57)$$

Setzt man diese Ausdrücke in Gleichung (3.53) ein, dann erhält man für die Beanspruchungsfunktion des einseitig freien Stabes

$$M(\varphi) = A_1 a_{M_1} M_{1I}^* + B_1 a_{M_1} M_{2I}^* + A_2 a_{M_2} M_{3I}^* \quad (3.58)$$

wobei M_{1I}^* , M_{2I}^* und M_{3I}^* Symbole für die Funktionen

$$M_{1I}^*(\varphi) = \sin n_1 \varphi - \frac{n_1}{n_3} \sin n_3 \varphi \quad (3.59)$$

$$M_{2I}^*(\varphi) = \cos n_1 \varphi + \frac{\Delta_2}{\Delta} \frac{a_{M_2}}{a_{M_1}} \cos n_2 \varphi + \frac{\Delta_3 a_{M_3}}{\Delta a_{M_1}} \cos n_3 \varphi \quad (3.60)$$

und $M_{3I}^*(\varphi) = \sin n_2 \varphi - \frac{n_2}{n_3} \sin n_3 \varphi \quad (3.61)$

sind.

Jede Superposition dieser drei Funktionen mit beliebigen Faktoren stellt eine mögliche Beanspruchungsform eines Stabes mit einem freien Ende bei $\varphi = 0$ dar.

3.5.2 Bereich II

Die allgemeine Lösung für die Radialauslenkung setzt sich in diesem Frequenzbereich aus den Funktionen

$$\left. \begin{aligned} u_1(\varphi) &= A_1 \sin n_1 \varphi + B_1 \cos n_1 \varphi \\ u_2(\varphi) &= A_2 \operatorname{Im} \alpha \varphi \sin \beta \varphi + B_2 \operatorname{Re} \alpha \varphi \sin \beta \varphi \\ \text{und} \quad u_3(\varphi) &= A_3 \operatorname{Im} \alpha \varphi \cos \beta \varphi + B_3 \operatorname{Re} \alpha \varphi \cos \beta \varphi \end{aligned} \right\} (3.62)$$

zusammen.

Daraus folgen als Lösungsfunktionen für das Biegemoment

$$\left. \begin{aligned} M_1(\varphi) &= A_1 a_{M1} \sin n_1 \varphi + B_1 a_{M1} \cos n_1 \varphi, \\ M_2(\varphi) &= A_2 (a_{M2} \operatorname{Re} \alpha \varphi \cos \beta \varphi + a_{M3} \operatorname{Im} \alpha \varphi \sin \beta \varphi) \\ &\quad + B_2 (a_{M2} \operatorname{Im} \alpha \varphi \cos \beta \varphi + a_{M3} \operatorname{Re} \alpha \varphi \sin \beta \varphi) \\ \text{und} \quad M_3(\varphi) &= A_3 (a_{M3} \operatorname{Im} \alpha \varphi \cos \beta \varphi - a_{M2} \operatorname{Re} \alpha \varphi \sin \beta \varphi) \\ &\quad + B_3 (a_{M3} \operatorname{Re} \alpha \varphi \cos \beta \varphi - a_{M2} \operatorname{Im} \alpha \varphi \sin \beta \varphi). \end{aligned} \right\} (3.63)$$

Die hierin verwendeten Abkürzungen haben die folgende Bedeutung:

$$\left. \begin{aligned} a_{M1} &= 1 - n_1^2 \\ a_{M2} &= 2 \alpha \beta \\ a_{M3} &= 1 + \alpha^2 - \beta^2 \end{aligned} \right\} (3.64)$$

Zwischen den Konstanten A_1 bis B_3 bestehen auf Grund der Randbedingungen für das freie Ende die Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} a_{M2} A_2 + a_{M1} B_1 + a_{M3} B_3 &= 0, \\ a_{R1} A_1 + a_{R3} A_3 + a_{R2} B_2 &= 0 \\ \text{und} \quad a_{N2} A_2 + a_{N1} B_1 + a_{N3} B_3 &= 0 \end{aligned} \right\} (3.65)$$

wobei folgende Abkürzungen eingeführt wurden:

$$\left. \begin{aligned} a_{R1} &= n_1 a_{M1}, & a_{N1} &= -n_1 a_{R1} - k \\ a_{R2} &= \alpha a_{M2} + \beta a_{M3}, & a_{N2} &= \alpha a_{R2} + \beta a_{R3} \\ a_{R3} &= \alpha a_{M3} - \beta a_{M2}, & a_{N3} &= \alpha a_{R3} - \beta a_{R2} - k \end{aligned} \right\} (3.66)$$

Wollen wir z.B. die Konstanten A_2 , A_3 und B_3 eliminieren, dann können wir aus dem Gleichungssystem (3.65) die Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} A_2 &= \frac{a_{N_1} a_{M_3} - a_{M_1} a_{N_3}}{a_{M_2} a_{N_3} - a_{N_2} a_{M_3}} B_1 = \frac{\Delta_2}{\Delta} B_1, \\ A_3 &= -\frac{a_{Q_1}}{a_{Q_3}} A_1 - \frac{a_{Q_2}}{a_{Q_3}} B_2 \\ \text{und } B_3 &= \frac{a_{M_1} a_{N_2} - a_{M_2} a_{N_1}}{a_{M_2} a_{N_3} - a_{N_2} a_{M_3}} B_1 = \frac{\Delta_3}{\Delta} B_1 \end{aligned} \right\} (3.67)$$

herleiten. Wir erhalten schließlich die folgenden drei Momentenfunktionen:

$$M_{1II}^*(\varphi) = \alpha \sin n_1 \varphi - n_1 \mathcal{D} \sin \alpha \varphi \cos \beta \varphi \quad (3.68)$$

$$M_{2II}^*(\varphi) = \cos n_1 \varphi + \left(\frac{\Delta_2}{\Delta} \frac{a_{M_3}}{a_{M_2}} - \frac{\Delta_3}{\Delta} \right) \mathcal{D} \sin \alpha \varphi \sin \beta \varphi \quad (3.69)$$

$$+ \left(\frac{\Delta_3}{\Delta} \frac{a_{M_3}}{a_{M_2}} + \frac{\Delta_2}{\Delta} \right) \mathcal{L} \cos \alpha \varphi \cos \beta \varphi \quad (3.70)$$

$$M_{3II}^*(\varphi) = \alpha \mathcal{L} \cos \alpha \varphi \sin \beta \varphi - \beta \mathcal{D} \sin \alpha \varphi \cos \beta \varphi \quad (3.70)$$

Jede Linearkombination der Form

$$M_{II}^*(\varphi) = \sum_{m=1}^3 M_{mII}^*(\varphi) \quad (3.71)$$

stellt für Frequenzparameter aus dem Bereich II eine mögliche Beanspruchungsform eines einseitig freien Stabes dar.

3.5.3 Bereich III

Die allgemeine Lösung für die Radialauslenkung $u(\varphi)$ setzt sich aus den Funktionen

$$u_1(\varphi) = A_1 \sin n_1 \varphi + B_1 \cos n_1 \varphi \quad \left. \vphantom{u_1(\varphi)} \right\} (3.72)$$

$$u_2(\varphi) = A_2 \mathcal{D} \sin n_2 \varphi + B_2 \mathcal{L} \cos n_2 \varphi$$

$$\text{und } u_3(\varphi) = A_3 \mathcal{D} \sin n_3 \varphi + B_3 \mathcal{L} \cos n_3 \varphi$$

zusammen. Führt man jetzt die Abkürzungen

$$\left. \begin{aligned} a_{M_1} &= 1 - n_1^2 & ; & \quad a_{M_i} = 1 + n_i^2 \\ a_{Q_1} &= n_1 (1 - n_1^2) & ; & \quad a_{Q_i} = n_i (1 + n_i^2) \quad , \quad (i=2,3) \\ a_{N_1} &= n_1^2 (1 - n_1^2) - k & ; & \quad a_{N_i} = n_i^2 (1 + n_i^2) - k \end{aligned} \right\} (3.73)$$

ein, dann ergeben sich aus (3.72) zunächst als Lösungsfunktionen für das bezogene Biegemoment

$$M_m(\varphi) = \alpha_{Mm} u_m(\varphi) \quad (m=1, 2, 3) \quad (3.74)$$

und aus den Randbedingungen schließlich dieselben Beziehungen zwischen den Konstanten A_3, B_2, B_3 und A_1, A_2, B_1 wie (3.57), wobei aber zu beachten ist, daß die Bedeutung der Abkürzungen jetzt durch (3.73) gegeben ist. Man findet daraus, daß sich - für k im Bereich III - jede Beanspruchungsform eines einseitig freien Stabes durch eine Superposition der folgenden drei Funktionen darstellen läßt:

$$M_{1III}^*(\varphi) = \sin n_1 \varphi - \frac{n_1}{n_3} \sin n_3 \varphi \quad (3.75)$$

$$M_{2III}^*(\varphi) = \cos n_1 \varphi + \frac{\Delta_2 \alpha_{M2}}{\Delta \alpha_{M1}} \cos n_2 \varphi + \frac{\Delta_3 \alpha_{M3}}{\Delta \alpha_{M1}} \cos n_3 \varphi \quad (3.76)$$

$$M_{3III}^*(\varphi) = \sin n_2 \varphi - \frac{n_2}{n_3} \sin n_3 \varphi \quad (3.77)$$

3.6 Beweis zu Satz 8

Der Beweis von Satz 7 wird (in Kap. 3.7) nach demjenigen von Satz 8 geführt, weil in Kap. 3.7 Funktionen benutzt werden, die in Kap. 3.6 erklärt werden.

Zum Beweis von Satz 8 muß gezeigt werden, daß sich zu jedem vorgegebenen Frequenzparameter aus den Momentenfunktionen $M_m^*(\varphi)$ des einseitig freien Stabes Beanspruchungsformen bilden lassen, deren absolutes Maximum am rechten Ende des vorgegebenen Stabintervalls liegt. Am einfachsten ist dies natürlich dann zu zeigen, wenn man Momentenfunktionen angeben kann, die von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$ monoton ansteigen.

Für jeden der drei Frequenzbereiche werden nun geeignete Funktionen angegeben.

3.6.1 Bereich I

Zur Konstruktion einer Beanspruchungsfunktion, die von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$ monoton ansteigt, ziehen wir von den in den Gleichungen (3.59) bis (3.61) aufgeführten Momentenfunktionen

$$M_{1I}^*(\varphi) = \frac{n_1}{n_3} \sin n_3 \varphi - \sin n_1 \varphi$$

und

$$M_{3I}^*(\varphi) = \frac{n_2}{n_3} \sin n_3 \varphi - \sin n_2 \varphi$$

heran. Diese Funktionen haben bei $\varphi = 0$ einen Wendepunkt mit horizontaler Tangente. Die genaue Gestalt hängt über die Wellenzahlen n_m vom Frequenzparameter k ab, aber \mathcal{M}_{1I}^* und \mathcal{M}_{3I}^* haben für alle Werte von k im Intervall $0 < \varphi \leq 2\pi$ nur ein relatives Extremum, das mit wachsendem k nach links wandert. Das Maximum von \mathcal{M}_{1I}^* liegt immer bei kleineren Winkeln als das von \mathcal{M}_{3I}^* . Wir überlagern nun beide Funktionen derart, daß für $\varphi = 0$ die 3. Ableitung der Summenfunktion

$$\mathcal{M}_{4I}^*(\varphi) = \mathcal{M}_{1I}^*(\varphi) + C_{3I} \mathcal{M}_{3I}^*(\varphi)$$

verschwindet. Aus der Forderung

$$\left[\frac{d^3 \mathcal{M}_{4I}^*}{d\varphi^3} \right]_{\varphi=0} \quad \text{folgt} \quad C_{3I} = - \frac{n_1}{n_3} \frac{n_1^2 - n_3^2}{n_2^2 - n_3^2}$$

und damit

$$\mathcal{M}_{4I}^*(\varphi) = \frac{n_1}{n_2^2 - n_3^2} \left[\frac{n_2^2 - n_1^2}{n_3} \sin n_3 \varphi + \frac{n_1^2 - n_3^2}{n_2} \sin n_2 \varphi + \frac{n_3^2 - n_2^2}{n_1} \sin n_1 \varphi \right] \quad (3.78)$$

Die Durchrechnung zeigt, daß der Verlauf dieser Funktion im ganzen Frequenzbereich I fast gleich bleibt. \mathcal{M}_{4I}^* hat eine Berührung 3. Ordnung mit der φ -Achse bei $\varphi = 0$, einen Wendepunkt an einer Stelle φ_{Wp4} , die im Intervall

$$1,4\pi < \varphi < 1,5\pi$$

liegt, und ein relatives Maximum bei einem Wert φ_{m4I} , der immer größer als 2π ist.

Bis auf geringfügige Unterschiede verläuft \mathcal{M}_{4I}^* für alle k so, wie es in Abb. 18 für $k = 0,11$ dargestellt ist.

Die Funktion \mathcal{M}_{4I}^* liefert offensichtlich einen Beanspruchungsverlauf, dessen größter Wert für jeden Öffnungswinkel $\varphi_E \leq 2\pi$ am rechten Ende des Stabintervalls liegt. Ebenso kann man \mathcal{M}_{4I}^* mit einer der drei Funktionen \mathcal{M}_{1I}^* , \mathcal{M}_{2I}^* oder \mathcal{M}_{3I}^* immer so überlagern, daß das absolute Maximum am rechten Stabende bleibt.

3.6.2 Bereich II

Von den Beanspruchungsfunktionen des einseitig freien Stabes nach den Gleichungen (3.68) bis (3.70) betrachten wir zunächst

$$M_{3II}^*(\varphi) = \alpha \cos \alpha \varphi \sin \beta \varphi - \beta \sin \alpha \varphi \cos \beta \varphi$$

Diese Funktion (vgl. Abb.17) hat bei $\varphi = 0$ einen horizontalen Wendepunkt und für alle Werte von k im Intervall $0 < \varphi \leq 2\pi$ höchstens ein relatives Extremum. Die Lage dieses Extremums ergibt sich aus

$$\left[\frac{dM_{3II}^*}{d\varphi} \right]_{\varphi = \varphi_{\max 3II}} = (\alpha^2 + \beta^2) \sin \alpha \varphi_{\max 3II} \cdot \sin \beta \varphi_{\max 3II} = 0 \quad (3.79)$$

zu

$$\varphi_{\max 3II} = \frac{\pi}{\beta}.$$

Wenn der Frequenzparameter $k \geq 3$ ist, ist $\beta \leq 0,5$ (vgl. Abb.4), und demnach ist dann

$$\varphi_{\max 3II} \geq 2\pi. \quad (3.80)$$

Für Frequenzparameter zwischen $k = 3$ und der oberen Grenze des Bereichs II stellt also M_{3II}^* die gesuchte Funktion dar, die im Intervall $0 < \varphi \leq 2\pi$ monoton ansteigt.

Für Werte von k aus dem unteren Teil des Bereichs II ($k < 3$) gilt

$$0,5 \leq \beta < 0,54 \quad (3.81)$$

und wegen Gleichung (3.79) also

$$\varphi_{\max 3II} > 1,85\pi \quad (3.82)$$

Für Stäbe mit kleineren Öffnungswinkeln als $\varphi_E = 1,85\pi$ kann also auch im unteren Teil des Frequenzbereichs II mit Hilfe der Funktion M_{3II}^* das absolute Beanspruchungsmaximum immer auf das rechte Stabende gelegt werden.

Um in diesem Unterbereich Satz 8 auch für Öffnungswinkel der Größe

$$1,85\pi \leq \varphi_E \leq 2\pi$$

zu beweisen, muß eine Momentenfunktion gefunden werden, die im Intervall

$$1,85 \leq \varphi \leq 2\pi$$

monoton ansteigt und deren Funktionswerte für $\varphi < 1,85\pi$ dem Betrage nach kleiner als der Wert an der Stelle $\varphi = 1,85\pi$ sind.

Eine solche Funktion ist

$$M_{1II}^*(\varphi) = \alpha \sin n_1 \varphi - n_1 \sin \alpha \varphi \cos \beta \varphi$$

nach Gleichung (3.68). Eine numerische Untersuchung zeigt, daß sie für $0,113 < k \leq 3$ immer den in Abb.17 gezeichneten typi-

schen Verlauf mit einem einzigen relativen Extremwert zwischen $\varphi = 0$ und 2π hat. Zwischen dem Minimum $M_{\min 1 \text{ II}}$, das immer bei Werten

$$\varphi_{\min 1 \text{ II}} < \pi$$

liegt, und $\varphi = 2\pi$ ist die Steigung positiv, und es gilt stets

$$|M_{1 \text{ II}}^*(1,85\pi)| > |M_{\min 1 \text{ II}}|,$$

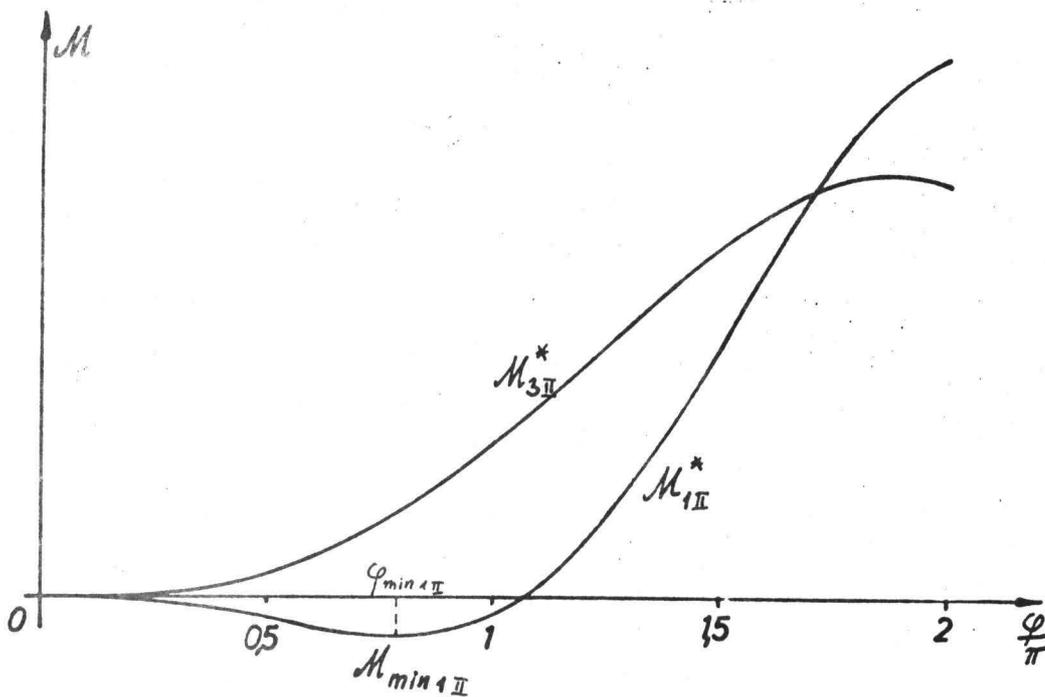


Abb. 17

und zwar ist für alle k aus dem betrachteten Unterbereich

$$|M_{1 \text{ II}}^*(1,85\pi)| > 10 |M_{\min 1 \text{ II}}|.$$

Damit ist gezeigt, daß sich für jeden Frequenzparameter k aus dem gesamten Bereich II und für jeden Öffnungswinkel Momentenverläufe angeben lassen, deren absolutes Maximum am rechten Ende des Stabintervalls auftritt. Die Funktionen $M_{1 \text{ II}}^*$ bzw. $M_{3 \text{ II}}^*$ können jeweils auch mit irgendwelchen der 3 Funktionen (3.68) bis (3.70) durch geeignete Wahl der Faktoren so überlagert werden, daß das absolute Maximum am rechten Stabende bleibt.

3.6.3 Bereich III

Aus der Gruppe (3.75) bis (3.77) nehmen wir die Momentenfunktion

$$M_{1 \text{ III}}^*(\varphi) = \frac{n_1}{n_3} \sin n_3 \varphi - \sin n_1 \varphi$$

Diese Funktion steigt für $\varphi > 0$ monoton an und hat keine relativen Extrema; denn ihre Ableitung

$$M_{1\text{III}}^{*'} = n_1 (\sin n_3 \varphi - \cos n_1 \varphi) \quad (3.83)$$

ist für alle $\varphi \neq 0$ positiv. Mit dieser Funktion ist es also für jeden Öffnungswinkel und für jede Frequenz möglich, die Bruchstelle an die Einspannstelle zu legen. Es lassen sich auch beliebig viele willkürliche Koeffizienten C_2 und C_3 derart angeben, daß eine Linearkombination der Form

$$M_{\text{III}}^*(\varphi) = M_{1\text{III}}^* + C_2 M_{2\text{III}}^* + C_3 M_{3\text{III}}^*$$

von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$ monoton ansteigt.

Hiermit ist Satz 8 für alle Frequenzbereiche bewiesen.

4.7 Beweis zu Satz 7

Es ist zu zeigen, daß es mit Hilfe der Momentenfunktionen für den einseitig freien Stab möglich ist, das absolute Beanspruchungsmaximum im Intervall

$$0 < \varphi \leq 2\pi$$

auf jede vorgegebene Stelle φ_B zu legen. Hierfür erweist es sich als zweckmäßig, den Bereich von $\varphi = 0$ bis 2π in die Abschnitte 1 ($\pi \leq \varphi \leq 2\pi$) und 2 ($0 < \varphi \leq \pi$) zu unterteilen und den Beweis für diese Teilintervalle getrennt zu führen.

4.7.1 Teilintervall 1 ($\pi \leq \varphi \leq 2\pi$)

Wir wählen als Frequenzparameter $k = 0,11$, also einen Wert in der Nähe der oberen Grenze des Frequenzbereichs I, und betrachten die Funktionen

$$M_{1\text{I}}^*(\varphi) = \sin n_1 \varphi - \frac{n_1}{n_3} \sin n_3 \varphi,$$

$$M_{2\text{I}}^*(\varphi) = \cos n_1 \varphi + \frac{\Delta_2}{\Delta} \frac{a_{M2}}{a_{M1}} \cos n_2 \varphi + \frac{\Delta_3}{\Delta} \frac{a_{M3}}{a_{M1}} \cos n_3 \varphi$$

und
$$M_{4\text{I}}^*(\varphi) = \frac{n_2^2 - n_1^2}{n_3} \sin n_3 \varphi + \frac{n_1^2 - n_3^2}{n_2} \sin n_2 \varphi + \frac{n_3^2 - n_2^2}{n_1} \sin n_1 \varphi$$

nach den Gleichungen (3.59), (3.60) und (3.78). Diese Funktionen und ihre Ableitungen $M_{1\text{I}}^{*'}, M_{2\text{I}}^{*}'$ und $M_{3\text{I}}^{*}'$ sind in Abb. 18 eingezeichnet worden, wobei sie mit geeigneten gewählten Faktoren versehen wurden, um die graphische Darstellung deutlicher zu machen.

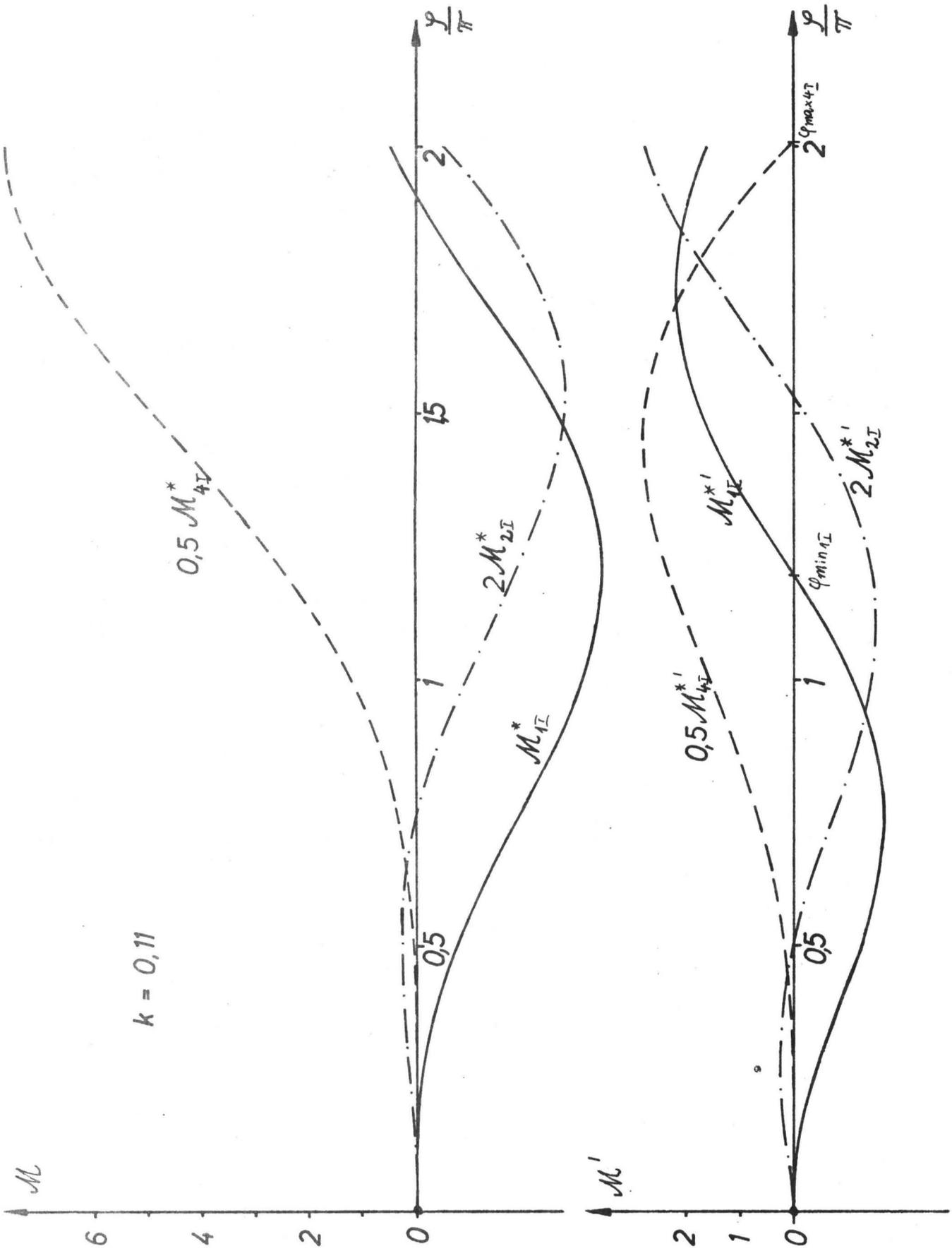


Abb. 18

M_{1I}^* hat ein relatives Minimum an der Stelle

$$\varphi_{\min 1I} \approx 1,19\pi, \quad (3.84)$$

M_{4I}^* ein relatives Maximum bei

$$\varphi_{\max 4I} > 2\pi \quad (3.85)$$

(siehe Abb.18). Bildet man nun mit zunächst noch willkürlichen Koeffizienten D_1 und D_4 die Funktion

$$M_{5I}^*(\varphi) = D_4 M_{4I}^* - D_1 M_{1I}^*, \quad (3.86)$$

dann läßt sich durch geeignete Wahl des Verhältnisses D_1/D_4 das relative Maximum von M_{5I}^* im Intervall

$$\varphi_{\min 1I} \leq \varphi \leq \varphi_{\max 4I}$$

auf jede beliebige Stelle φ_B legen. Dazu braucht man nur

$$\frac{D_1}{D_4} = \frac{M_{4I}^{*'}(\varphi_B)}{M_{1I}^{*'}(\varphi_B)}$$

zu machen,

Wie man aus der Darstellung der Ableitungen $M_{1I}^{*'}$ und $M_{4I}^{*'}$ ersieht, hat M_{5I}^* zwischen $\varphi = 0$ und 2π keinen Nulldurchgang und kein weiteres relatives Extremum. Das Maximum bei φ_B ist also das absolute Maximum von $|M_{5I}^*|$ im Bereich $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Damit ist gezeigt, daß sich mit Hilfe der Funktion M_{5I}^* ein Beanspruchungsverlauf angeben läßt, der seinen größten Wert bei φ_B hat, sofern φ_B im Intervall

$$\varphi_{\min 1I} \leq \varphi \leq \varphi_{\max 4I}$$

liegt.

Um eine entsprechende Funktion für den Unterabschnitt

$$\pi \leq \varphi_B \leq \varphi_{\min 1I}$$

zu erhalten, bilden wir durch Überlagerung von M_{1I}^* und M_{2I}^* die Funktion

$$M_{6I}^*(\varphi) = D_2 M_{2I}^* - M_{1I}^*, \quad (3.87)$$

wobei die Konstante D_2 die Größe

$$D_2 = \frac{M_{1I}^{*'}(\varphi_B)}{M_{2I}^{*'}(\varphi_B)} \quad (3.88)$$

hat. Wie man aus der Darstellung von M_{1I}^* , M_{2I}^* und ihren Ableitungen in Abb.18 erkennt, hat M_{6I}^* im Intervall $0 < \varphi \leq 2\pi$ höchstens zwei relative Extrema, und für

$$0 < D_2 < 0,5$$

ist das weiter links gelegene Maximum dem Betrage nach größer als das in der Nähe von $\varphi = 2\pi$ gelegene Minimum. Da nun im Bereich $\pi \leq \varphi \leq \varphi_{\min I}$

$$|\mathcal{M}_{I}^*(\varphi)| < |\mathcal{M}_{II}^*(\varphi)|$$

ist, ist $D_2 < 0,5$, und damit stellt das relative Maximum bei φ_B im gesamten Intervall $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ den größten Wert von $|\mathcal{M}_{II}^*|$ dar.

Außer den hier aufgezeigten Wegen gibt es beliebig viele andere Möglichkeiten, Beanspruchungsverläufe zu konstruieren, die ihren größten Wert an einer beliebig vorgegebenen Stelle φ_B im Intervall $\pi \leq \varphi \leq 2\pi$ annehmen.

4.7.2 Teilintervall 2 ($0 < \varphi_B \leq \pi$)

Um die entsprechenden Funktionen für das Intervall $0 < \varphi_B \leq \pi$ zu finden, kann man die Tatsache ausnutzen, daß die Wellenlänge der trigonometrischen Lösungsfunktion mit wachsendem Frequenzparameter monoton abnimmt. Wenn man für Stäbe mit einem freien Ende bei $\varphi = 0$ Beanspruchungsverläufe aus der Überlagerung von

$$\mathcal{M}_1 = \cos n_1(\varphi + \varphi_1)$$

und den abklingenden Funktionen

$$\mathcal{M}_2 = e^{-\alpha\varphi} \sin \beta\varphi \quad \text{und} \quad \mathcal{M}_3 = e^{-\alpha\varphi} \cos \beta\varphi \quad (\text{im Bereich II})$$

$$\text{bzw.: } \mathcal{M}_2 = e^{-n_2\varphi} \quad \text{und} \quad \mathcal{M}_3 = e^{-n_3\varphi} \quad (\text{im Bereich III})$$

konstruiert, dann zeigt es sich, daß immer das erste relative Extremum (vom freien Ende aus gerechnet) für $\varphi > 0$ den größten Wert des Biegemoments darstellt.

Wir untersuchen zunächst, welches Intervall von der Stelle $\hat{\varphi}^+$ durchlaufen wird, wenn der Frequenzparameter k den Frequenzbereich II durchläuft. Hier machen wir für die Radialauslenkung u den Ansatz

$$\left. \begin{aligned} u_{4II}(\varphi) = & \cos n_1\varphi + B_{1II} \sin n_1\varphi \\ & + B_{2II} e^{-\alpha\varphi} \cos \beta\varphi + B_{3II} e^{-\alpha\varphi} \sin \beta\varphi \end{aligned} \right\} (3.89)$$

und bestimmen die darin enthaltenen Konstanten B_{1II} , B_{2II} und B_{3II} so, daß die drei Randbedingungen für das freie Ende erfüllt werden. Die numerische Durchrechnung ergibt, daß die Stelle $\hat{\varphi}$ des absoluten Maximums von $|\mathcal{M}_{4II}| = |u_{4II} + u_{4II}''|$ mit

^{+) $\hat{\varphi}$ = Abszisse des absoluten Maximums des Biegemoments}

steigender Frequenz kontinuierlich die Werte von

$$\hat{\varphi} \approx 1,08\pi \quad \text{bis} \quad \hat{\varphi} \approx 0,328\pi$$

durchläuft, wie es in Abb.19 aufgetragen ist.

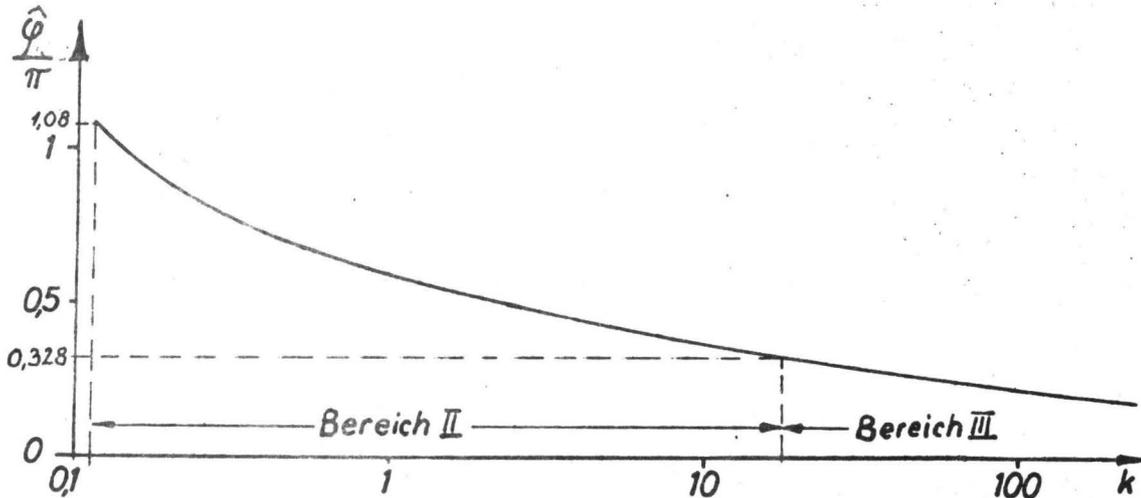


Abb. 19

Im Frequenzbereich III finden wir die entsprechende Momentenfunktion mit Hilfe des Ansatzes

$$u_{4\text{III}}(\varphi) = \cos n_1 \varphi + B_{1\text{III}} \sin n_1 \varphi + B_{2\text{III}} e^{-n_2 \varphi} + B_{3\text{III}} e^{-n_3 \varphi} \quad (3.90)$$

für die Radialauslenkung, wobei die Konstanten $B_{1\text{III}}$, $B_{2\text{III}}$ und $B_{3\text{III}}$ aus den Randbedingungen für das freie Ende ermittelt werden. Berechnet man die Stelle $\hat{\varphi}$ des absoluten Maximums des Biegemoments $|\mathcal{M}_{4\text{III}}| = |u_{4\text{III}} + u_{4\text{III}}''|$ numerisch als Funktion des Frequenzparameters k , dann zeigt es sich, daß sich die Kurve $\hat{\varphi} = f(k)$ stetig an die entsprechende Kurve für den Bereich III anschließt (siehe Abb.19).

Für große Werte von k läßt sich für den Verlauf der Kurve $\hat{\varphi} = f(k)$ ein analytischer Näherungsausdruck angeben,

Auf Grund der Beziehungen

$$\lim_{k \rightarrow \infty} n_1 = \sqrt[4]{k}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} n_2 = \sqrt[4]{k} \quad \text{und} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} n_3 = 1$$

(siehe Gleichungen (2.66)) ergeben sich für die Koeffizienten $B_{1\text{III}}$, $B_{2\text{III}}$ und $B_{3\text{III}}$ die Näherungswerte

$$\left. \begin{aligned} B_{1\text{III}} &= -1 \\ B_{2\text{III}} &= 1 - \frac{2-k}{k\sqrt{k}} \approx 1 + \frac{1}{\sqrt{k}} \\ \text{und} \quad B_{3\text{III}} &= \frac{2\sqrt{k}}{2-k-k\sqrt{k}} \approx -\frac{2}{k} \end{aligned} \right\} (3.91)$$

und man findet schließlich, daß mit wachsender Frequenz $\mathcal{M}_{4\text{III}}$ asymptotisch in die Form

$$\mathcal{M}_{\infty}(\varphi) = \sin \sqrt[4]{k} \varphi - \cos \sqrt[4]{k} \varphi + e^{-\sqrt[4]{k} \varphi} \quad (3.92)$$

übergeht.

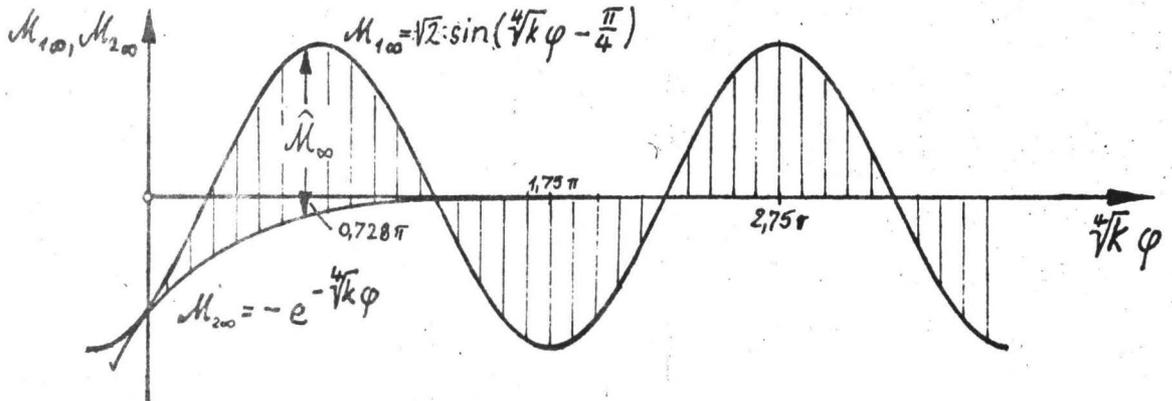


Abb. 20

\mathcal{M}_{∞} ist in Abb. 20 als Differenz von

$$\mathcal{M}_{1\infty}(\varphi) = \sin \sqrt[4]{k} \varphi - \cos \sqrt[4]{k} \varphi = \sqrt{2} \sin\left(\sqrt[4]{k} \varphi - \frac{\pi}{4}\right)$$

und

$$\mathcal{M}_{2\infty}(\varphi) = -e^{-\sqrt[4]{k} \varphi}$$

dargestellt. Die Stelle $\hat{\varphi}_{\infty}$ des absoluten Maximums dieser Funktion für $\varphi > 0$ ergibt sich aus der Gleichung

$$\sqrt{2} \cos\left(\sqrt[4]{k} \hat{\varphi}_{\infty} - \frac{\pi}{4}\right) = e^{-\sqrt[4]{k} \hat{\varphi}_{\infty}} \quad (3.93)$$

zu

$$\hat{\varphi}_{\infty} \approx \frac{0,728}{\sqrt[4]{k}} \quad (3.94)$$

Sie nähert sich für $k \rightarrow \infty$ also asymptotisch dem freien Ende.

Zu jeder vorgegebenen Stelle φ_B aus dem Intervall $0 < \varphi \leq \pi$ kann mit Hilfe der Funktionen $\mathcal{U}_{4\text{II}}$ nach Gleichung (3.89) oder $\mathcal{U}_{4\text{III}}$ nach Gleichung (3.90) also ein Beanspruchungsverlauf angegeben werden, dessen größter Wert an der Stelle φ_B auftritt. Es ist außerdem immer möglich, der Funktion

$\mathcal{M}_{4\text{II}} = \mathcal{M}_{4\text{II}} + \mathcal{M}_{4\text{II}}''$ bzw. $\mathcal{M}_{4\text{III}} = \mathcal{M}_{4\text{III}} + \mathcal{M}_{4\text{III}}''$ ansteigende Funktionen vom Typ (3.69) oder (3.70) (Bereich II) bzw. (3.76) (Bereich III)

mit genügend kleinen Faktoren derart zu überlagern, daß das am weitesten links gelegene Maximum der größte Funktionswert

bleibt. Am rechten Stabende kann damit jedoch das Verhältnis der Randgrößen zueinander in weiten Grenzen variiert werden. Damit ist insgesamt gezeigt, daß Frequenz und Randbedingungen immer so gewählt werden können, daß ein Bruch an einem beliebig vorgegebenen Stabpunkt eintritt, der nicht mit dem freien Ende zusammenfällt. Soll φ_B allerdings sehr dicht am freien Ende liegen, dann muß - bei vorgegebenen Stabmessungen - die Frequenz sehr hoch sein. Die Grenze des Gültigkeitsbereichs der zugrunde liegenden Theorie, nämlich $k \ll f$ (siehe S.16), ergibt also eine untere Grenze für φ_B .

3.8 Beweis zu Satz 9

Satz 9 folgt einfach aus der Tatsache, daß die drei Momentenfunktionen M_m^* für jeden der 3 Frequenzbereiche (siehe Gleichungen (3.59) ff, (3.68) ff und (3.75) ff) jeweils voneinander linear unabhängig sind. Jede Superposition

$$M^*(\varphi) = \sum_{m=1}^3 D_m M_m^*(\varphi)$$

mit beliebigen Koeffizienten D_m ist eine mögliche Beanspruchungsform. Da für die Lage der Nullstellen dieser Funktion nur zwei Konstanten wesentlich sind, können wir z.B. $D_1 = 1$ setzen und erhalten

$$M^*(\varphi) = M_1^* + D_2 M_2^* + D_3 M_3^* \quad (3.95)$$

Die Forderung, daß die Beanspruchung an einer vorgegebenen Stelle φ_R verschwinden soll, liefert nur eine Gleichung für die beiden freien Konstanten D_2 und D_3 . Man kann also z.B. D_2 willkürlich wählen und die Bedingung $M^*(\varphi_R) = 0$ durch

$$D_3 = - \frac{M_1^*(\varphi_R) + D_2 M_2^*(\varphi_R)}{M_3^*(\varphi_R)} \quad (3.96)$$

erfüllen, sofern $M_3^*(\varphi_R) \neq 0$ ist. Wenn aber $M_3^*(\varphi_R) = 0$ ist, ist M_3^* bereits die gesuchte Funktion. Man kann dann D_3 willkürlich wählen und

$$D_2 = - \frac{M_1^*(\varphi_R)}{M_2^*(\varphi_R)} \quad (3.97)$$

machen.

3.9 Untersuchungen zu Satz 10

Wenn das Amplitudenverhältnis der Zustandsgrößen an beiden

Stabenden vorgegeben ist, dann ist die Schwingungsform und damit die Beanspruchung bis auf einen Faktor eindeutig durch die Frequenz bestimmt.

Betrachten wir einen Stab mit einem freien Ende bei $\varphi = 0$, dann kann in den Frequenzbereichen II und III das Biegemoment nicht - wie in Abschnitt 3.7.2 - nur aus einer trigonometrischen und zwei abklingenden Funktionen gebildet werden, die mit wachsendem φ gegen Null konvergieren. Denn zur Erfüllung der drei Randbedingungen am rechten Ende ($\varphi = \varphi_E$) müssen noch jeweils die ansteigenden Funktionen

$$\begin{aligned} & M_5 = e^{\alpha\varphi} \cos \beta\varphi \quad \text{und} \quad M_6 = e^{\alpha\varphi} \sin \beta\varphi \quad (\text{im Bereich II}) \\ \text{bzw.} \quad & M_5 = e^{\eta_2\varphi} \quad \text{und} \quad M_6 = e^{\eta_3\varphi} \quad (\text{im Bereich III}) \end{aligned}$$

hinzutreten. Dann ist aber im allgemeinen nicht immer dasjenige relative Maximum von $|M|$, das dem freien Ende am nächsten liegt, absolutes Beanspruchungsmaximum, sondern \hat{M} kann auch mit einem anderen relativen Extremum oder mit dem Wert am rechten Stabende zusammenfallen.

Dementsprechend durchläuft dann auch die Stelle der größten Beanspruchung mit wachsender Frequenz nicht die gesamte Stablänge, sondern nur gewisse Bereiche des Stabes. Bei vorgegebenen Randbedingungen am rechten Ende kann also auch bei freier Wahl der Frequenz ein einseitig freier Stab nicht an einer beliebigen Stelle zum Bruch gebracht werden.

Die Winkelbereiche, in denen Brüche möglich sind, hängen von der Art der Anregung bei $\varphi = \varphi_E$ und vom Öffnungswinkel des Stabes ab.

Damit über diese Bereiche einige konkrete Angaben gemacht werden können, wurde für Stäbe mit einem freien Ende bei $\varphi = 0$ eine Reihe spezieller Anregungsfälle durchgerechnet.

Nach Vorgabe der inhomogenen Randbedingungen am rechten Stabende ($\varphi = \varphi_E$) und der Anregungsfrequenz wurde der Verlauf des Biegemoments längs der Stabachse numerisch berechnet, und es wurde jeweils die Stelle $\hat{\varphi}$ ermittelt, an der dieses seinen größten Wert annimmt. Als weiterer Parameter wurde der Öffnungswinkel φ_E variiert.

Soll nun φ als Funktion der Frequenz aufgetragen werden, dann wird die Darstellung übersichtlicher, wenn man als Maß für die Frequenz nicht den Parameter

$$k = a^4 \frac{\rho F}{EI} \omega^2$$

benutzt, sondern einen neuen Parameter λ einführt.

Dieser 3. Frequenzparameter ist

$$\lambda = \sqrt[4]{k} \varphi_E = l \sqrt[4]{\frac{\rho F}{EI}} \sqrt{\omega}, \quad (3.98)$$

wobei

$$l = a \varphi_E$$

die Bogenlänge des Kreisbogenstabes bedeutet. Derselbe Parameter tritt bei der Behandlung der Biegeschwingungen gerader Stäbe auf, wenn man dort für l die Stablänge einsetzt.

λ eignet sich gut für die graphische Darstellung, weil die Differenz zwischen je zwei Eigenwerten λ_e für alle Öffnungswinkel und alle Frequenzen ungefähr konstant ist, während dies bei den Eigenwerten des Parameters k keineswegs der Fall ist.

Bezeichnet j die Ordnungszahl eines Eigenwertes, dann hat

$$\Delta \lambda_e = \lambda_{e_{j+1}} - \lambda_{e_j} \text{ ungefähr die Größe}$$

$$\Delta \lambda_e \approx \pi.$$

Aus diesem Grunde wurde in den später erläuterten Diagrammen als Maß für die Frequenz die Größe λ/π verwendet.

Bei genügend hohen Frequenzen, etwa von der 3. Eigenfrequenz an, werden die Schwingungsform und die Beanspruchungsform im wesentlichen durch die trigonometrische Funktion bestimmt; die quasiharmonischen Funktionen (im Frequenzbereich II) bzw. die hyperbolischen Funktionen (im Frequenzbereich III) machen sich nur an den Stabenden stärker bemerkbar. Bei diesen höheren Frequenzen wird der Verlauf der Beanspruchungsform in der Nähe des freien Endes näherungsweise durch die Funktion

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\omega(\varphi) &= \sqrt{2} \sin \left(\sqrt[4]{k} \varphi - \frac{\pi}{4} \right) + e^{-\sqrt[4]{k} \varphi} \\ &= \sqrt{2} \sin \left(\lambda \frac{\varphi}{\varphi_E} - \frac{\pi}{4} \right) + e^{-\lambda \frac{\varphi}{\varphi_E}} \end{aligned} \quad (3.99)$$

wiedergegeben (siehe Gleichung (3.92)). Die Art der Randbedingung am anderen Ende hat auf diesen Verlauf nur einen schwachen

Einfluß. Die relativen Extremwerte der Funktion M_∞ liegen bei

$$\left(\lambda \frac{\varphi}{\varphi_E}\right)_{\text{extr},\infty} \approx 0,728\pi, 1,75\pi, 2,75\pi, \dots \quad (3.100)$$

Hieraus folgt für die auf die Stablänge bezogenen Abszissen der relativen Beanspruchungsextrema

$$\frac{\varphi_{\text{extr},\infty}}{\varphi_E} \approx \frac{0,728}{\frac{\lambda}{\pi}}, \frac{1,75}{\frac{\lambda}{\pi}}, \frac{2,75}{\frac{\lambda}{\pi}}, \dots \quad (3.101)$$

Trägt man für irgendeinen speziellen Anregungsfall die numerisch berechneten Stellen φ_{extr} der relativen Extrema des Biegemoments über $\frac{\lambda}{\pi}$ auf, dann erhält man in den meisten Fällen Kurven, deren Verlauf ungefähr durch Gleichung (3.101) wiedergegeben wird (siehe Abb.21). Je näher φ_{extr} am freien Ende liegt und je größer k ist, desto besser trifft diese Näherung zu.

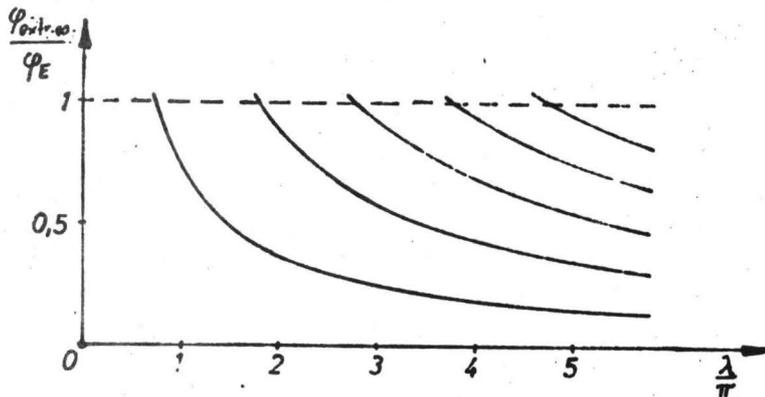


Abb. 21

Es hängt nun von der Anregungsfrequenz, der Art der Randbedingungen und dem Öffnungswinkel ab, ob eines der relativen Extrema oder der Wert am rechten Stabende das absolute Maximum des Biegemoments ist.

Im folgenden werden die Ergebnisse der numerischen Berechnung anhand von Diagrammen dargestellt und erörtert.

3.9.1 Rechtes Stabende fest eingespannt

Wenn die Einspannstelle eine harmonische Bewegung ausführt, so kann diese in eine Tangentialkomponente mit der Amplitude v_E , eine Radialkomponente mit der Amplitude u_E und eine Drehbewegung mit der Amplitude ψ_E zerlegt werden. Die zugehörige Schwingungsform des Stabes läßt sich dann als Superposition der folgenden

drei Grundtypen darstellen:

- A) Längsanregung mit $u_E = 0, \psi_E = 0, v_E \neq 0$
- B) Queranregung mit $v_E = 0, \psi_E = 0, u_E \neq 0$
- C) Drehanregung mit $v_E = 0, u_E = 0, \psi_E \neq 0$

Für diese drei Grundfälle wurden die auf S.68 unten genannten Rechnungen durchgeführt, wobei die Anregungsfrequenz die Werte zwischen Null und der 6. Eigenfrequenz des einseitig fest eingespannten Stabes durchläuft. Die Ergebnisse sind in den Abbildungen 22 bis 50 dargestellt, die im folgenden erläutert werden.

3.9.1.1 Stelle der höchsten Beanspruchung als Funktion der Frequenz

In den Diagrammen 22 bis 44 ist jeweils die Stelle $\hat{\varphi}$ der höchsten Beanspruchung in Abhängigkeit vom Frequenzparameter λ/π aufgetragen.

Die Sprungstellen in diesen Kurven kennzeichnen die Frequenzen, bei denen an zwei Stellen eines Stabes gleich große Beanspruchungen auftreten und $\hat{\varphi}$ von einer Stabstelle zu einer anderen überwechselt.

Die den Eigenfrequenzen des einseitig fest eingespannten Stabes entsprechenden Werte λ_e/π sind als strichpunktierte Linien eingezeichnet.

Für die Schwingungs- und die Beanspruchungsform ist es gleich, ob eine nicht verschwindende kinematische Randgröße oder die entsprechende dynamische Größe vorgeschrieben ist, d.h. ob

- im Fall A) $N_E \neq 0$ statt $v_E \neq 0,$
- im Fall B) $Q_E \neq 0$ statt $u_E \neq 0$ oder
- im Fall C) $M_E \neq 0$ statt $\psi_E \neq 0$

festgelegt wird. Die in den Diagrammen 22 bis 44 dargestellten Kurven gelten also jeweils für beide Anregungsarten; allerdings haben die Fälle mit vorgeschriebener dynamischer Randgröße andere Resonanzfrequenzen, die hier nicht eingezeichnet sind. Es sind dies die Eigenfrequenzen für die

folgenden Randbedingungen am rechten Stabende:

Symbolische Darstellung

A) $N_E = 0, u_E = 0, \psi_E = 0$



B) $v_E = 0, Q_E = 0, \psi_E = 0$



C) $v_E = 0, u_E = 0, M_E = 0$



Auf Grund der Diagramme 22 bis 44 lassen sich über die höchste Beanspruchung bei einseitig eingespannten Stäben mit Öffnungswinkeln, die kleiner als 2π sind, die folgenden Aussagen machen:

- 1.) Bei allen Eigenschwingungsformen - mit Ausnahme der ersten Eigenfunktion bei Öffnungswinkeln $\varphi_E > \sim 1,11\pi$ - tritt die größte Biegespannung an der Einspannstelle auf.
Während bei der 1. Eigenschwingungsform von Stäben mit kleinem Öffnungswinkel das Biegemoment vom freien Ende zum Einspannende hin monoton ansteigt, hat bei Öffnungswinkeln oberhalb $\sim 1,11\pi$ das Biegemoment im Stabintervall ein relatives Maximum, das dann zugleich absolutes Maximum ist. Dieses wandert mit zunehmendem Öffnungswinkel von der Einspannstelle aus in den Stab hinein.
- 2.) Nähert sich die Anregungsfrequenz einer Eigenfrequenz, dann geht die erzwungene Schwingungsform in die entsprechende Eigenschwingungsform über, unabhängig von der Art der Anregung. Bei Annäherung an eine Eigenfrequenz - mit Ausnahme der unter 1.) genannten Fälle - springt also bei jeder Anregungsart das absolute Beanspruchungsmaximum an die Einspannstelle über.
- 3.) Wird ein Stab durch eine reine Radialbewegung seiner Einspannstelle angeregt, dann wechselt beim Durchlaufen der Frequenz die größte Biegespannung zwischen der Einspannstelle und der Stelle desjenigen relativen Momentenmaximums, das dem freien Ende am nächsten liegt.
- 4.) Wenn bei Anregung durch eine reine Drehbewegung der Einspannung die Frequenz kontinuierlich wächst, liegt die größte Beanspruchung abwechselnd

an der Einspannstelle,

bei dem relativen Momentenmaximum, das der Einspannstelle benachbart ist

und dem relativen Maximum, das dem freien Ende am nächsten ist.

- 5.) Bei reiner Längsanregung der Einspannung kann die größte Biegespannung sowohl an der Einspannstelle als auch beim ersten, zweiten oder dritten relativen Momentenmaximum (vom freien Ende aus gerechnet) liegen.
- 6.) Für $\lambda > \sim 2,5\pi$ ergibt sich die Stelle desjenigen relativen Beanspruchungsmaximums, das dem freien Ende am nächsten liegt, mit guter Näherung aus der Gleichung

$$\frac{\varphi_{\max}}{\varphi_E} = \frac{0,728}{\frac{\lambda}{\pi}} \quad (\text{siehe Gleichung (3.101)}).$$

3.9.1.2 Grenzfrequenzen als Funktion des Öffnungswinkels

Aus einem Vergleich der Diagramme 22 bis 44 ersieht man, daß die Werte des Frequenzparameters λ , bei denen das absolute Beanspruchungsmaximum von einer Stabstelle zu einer anderen überspringt, vom Öffnungswinkel des Stabes abhängen. Trägt man nun für jeden Anregungsfall diese Grenzfrequenzen über dem Öffnungswinkel auf, dann erhält man die Diagramme 45 für Längsanregung, 46 für Queranregung und 47 für Drehanregung.

In diesen stellen die schraffierten Gebiete die Frequenzbereiche dar, in denen die größte Beanspruchung nicht an der Einspannstelle auftritt. Befindet sich innerhalb eines schraffierten Gebietes eine Grenzlinie, dann wechselt beim Überschreiten dieser Frequenz $\hat{\varphi}$ zwischen zwei Stellen, die nicht mit der Einspannstelle zusammenfallen.

Die durchgezogenen Linien stellen die Eigenwerte $\frac{\lambda_E}{\pi}$ dar.

Da als Ordinate $\frac{\lambda}{\pi} = \sqrt[4]{k} \frac{\varphi_E}{\pi}$ gewählt wurde, erscheinen die Linien $k = \text{const}$ als Geraden durch den Nullpunkt, die die Steigung $\sqrt[4]{k}$ haben. Zur Orientierung sind die Grenzen der 3 Lösungsbereiche der Differentialgleichung (vgl. S.24) strichpunktiert eingezeichnet, außerdem die Linie $k = 5000$, weil die Berech-

nungen nur bis zu diesem Wert von k durchgeführt wurden.

Interessant an diesen Kurvenblättern ist, daß es Punkte gibt, an denen die Grenzen der schraffierten Bereiche die Eigenfrequenzkurven schneiden. Bei einer solchen Eigenfrequenz treten an der Einspannstelle und an einer zweiten Stabstelle gleich große Beanspruchungen auf.

Während sonst in allen schraffierten Bereichen die Stelle $\hat{\varphi}$ mit steigender Frequenz auf das freie Ende zu wandert, bildet beim Anregungsfall B der innerhalb der Grenzen $1,11\pi < \varphi_E \leq 2\pi$ und $0 < \lambda < \pi$ liegende Bereich eine Ausnahme. Dort wandert bei wachsender Frequenz $\hat{\varphi}$ auf die Einspannstelle zu (vgl. die Abbildungen 33 bis 36). Nimmt die Frequenz auf Null ab, dann nähert die größte Beanspruchung sich einer Stelle, die um $\Delta\varphi = \pi/2$ von der Einspannstelle entfernt ist.

3.9.1.3 "Bruchbereiche" als Funktion des Öffnungswinkels

Aus den Diagrammen, die $\hat{\varphi}$ als Funktion von λ/π darstellen, kann man nun auch entnehmen, in welchen Bereichen des Stabes ein Dauerbruch möglich ist. Trägt man die Winkelbereiche, die von der Stelle des absoluten Beanspruchungsmaximums durchlaufen werden, über dem Öffnungswinkel auf, dann erhält man die Kurvenblätter 48 bis 50. Die schraffierten Gebiete geben hier die Winkelbereiche an, in denen Brüche auftreten können.

Bedingt durch den flachen Verlauf der Kurven $\hat{\varphi} = f\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)$ für große $\frac{\lambda}{\pi}$ - Werte, werden die "Bruchbereiche" zum freien Ende hin immer dichter und schmaler. Daher sind in den Diagrammen 48 bis 50 nur die Bereiche eingezeichnet, in denen bei Anregungsfrequenzen unterhalb der 6. Eigenfrequenz Brüche auftreten können.

3.9.2 Rechtes Stabende frei verschieblich

Am rechten Stabende sollen harmonische Kräfte Q_E , N_E und ein harmonisches Moment M_E angreifen. Der resultierende Randlastensektor läßt sich durch Superposition der drei Grundtypen

- D) Drehanregung mit $Q_E = 0, N_E = 0, M_E \neq 0$
- E) Queranregung mit $M_E = 0, N_E = 0, Q_E \neq 0$ und
- F) Längsanregung mit $M_E = 0, Q_E = 0, N_E \neq 0$

darstellen.

Die Resonanzfrequenzen sind jetzt die Eigenfrequenzen des beidseitig freien Stabes.

Die gleichen erzwungenen Schwingungs- und Beanspruchungsformen, wie bei den Randbedingungen D) bis F) erhält man auch jetzt wieder, wenn man statt der nicht verschwindenden dynamischen Randgröße die entsprechende kinematische Zustandsgröße vorgibt, d.h. wenn man

im Fall D) $\psi_E \neq 0$ statt $M_E \neq 0$,

im Fall E) $u_E \neq 0$ statt $Q_E \neq 0$ und

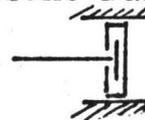
im Fall F) $v_E \neq 0$ statt $N_E \neq 0$

fordert.

Allerdings haben diese Anregungsarten wieder andere Resonanzfrequenzen. Diese entsprechen folgenden Lagerungsbedingungen:

Symbolische Darstellung

D) $Q_E = 0, N_E = 0, \psi_E = 0$



E) $M_E = 0, N_E = 0, u_E = 0$



F) $M_E = 0, Q_E = 0, v_E = 0$



3.9.2.1 Stelle der größten Beanspruchung als Funktion der Frequenz

Für die Typen D) und E) wurde für verschiedene Öffnungswinkel die Stelle ϕ der größten Beanspruchung ermittelt und als Funktion des Frequenzparameters λ/r in den Diagrammen 51 bis 61 dargestellt. In diesen sind die Resonanzfrequenzen wieder durch strichpunktierte Linien gekennzeichnet.

Man findet folgendes:

- 1.) Wegen der Symmetrie der Randbedingungen sind die Eigenschwingungs- und beanspruchungsformen gerader Ordnung zur Mitte des Stabes zentralsymmetrisch, diejenigen ungerader Ordnung axialsymmetrisch. Bei allen Eigenformen sind die beiden relativen Extrema des Biegemoments, die den beiden Stabenden am nächsten liegen, die größten Werte von $|M|$.
- 2.) Im Fall D) verlaufen die Kurven $\hat{\varphi} = f(\frac{\lambda}{\pi})$ qualitativ wie im Fall der Drehanregung bei unverschieblicher Einspannung, d.h. die größte Beanspruchung tritt abwechselnd am rechten Stabende, an den am weitesten rechts gelegenen und an dem am weitesten links gelegenen relativen Extremum des Biegemoments auf. Die Frequenzen, bei denen $\hat{\varphi}$ vom relativen Maximum in der Nähe des rechten Stabendes zu dem in der Nähe des linken Stabendes überspringt, stimmen mit den Eigenfrequenzen überein.
- 3.) Im Fall E) fällt $\hat{\varphi}$ immer mit dem relativen Extremum $M_{extr.,l}$ der Momentenfunktion zusammen, das dem freien Ende am nächsten liegt. Nur bei den Eigenfrequenzen ist das dem rechten Stabende benachbarte relative Extremum $M_{extr.,r}$ ebenso groß wie $M_{extr.,l}$. In den zugehörigen Diagrammen ist die Stelle von $M_{extr.,r}$ darum durch einen Kreis hervorgehoben.

3.9.2.2 Grenzfrequenzen als Funktion des Öffnungswinkels

Für den Fall der Drehanregung sind in Abb.62 entsprechend Abb.47 die Frequenzbereiche dargestellt, in denen die größte Beanspruchung nicht am rechten Stabende auftritt.

Für den Anregungstyp E) erübrigt sich ein solches Diagramm, weil die Stelle der größten Beanspruchung nicht springt.

3.9.2.3 "Bruchbereiche" als Funktion des Öffnungswinkels

Die Winkelbereiche, in denen bei den Randbedingungen D) und E) Brüche auftreten können, sind in den Abbildungen 63 und 64 in Abhängigkeit vom Öffnungswinkel aufgetragen worden.

4.10 Beweis von Satz 11

Der Satz 11 ergibt sich anschaulich aus der Tatsache, daß mit wachsender Frequenz die Anzahl der Nulldurchgänge (Knoten)

des Biegemoments immer größer wird. Nach dem Durchlaufen jeder Eigenfrequenz tritt eine neue Nullstelle an dem Ende, an dem die harmonische Erregung angreift, in den Stab ein. Sie wandert mit steigender Frequenz auf das freie Stabende zu, wobei die Abstände L_{k_n} zwischen den Knoten abnehmen.

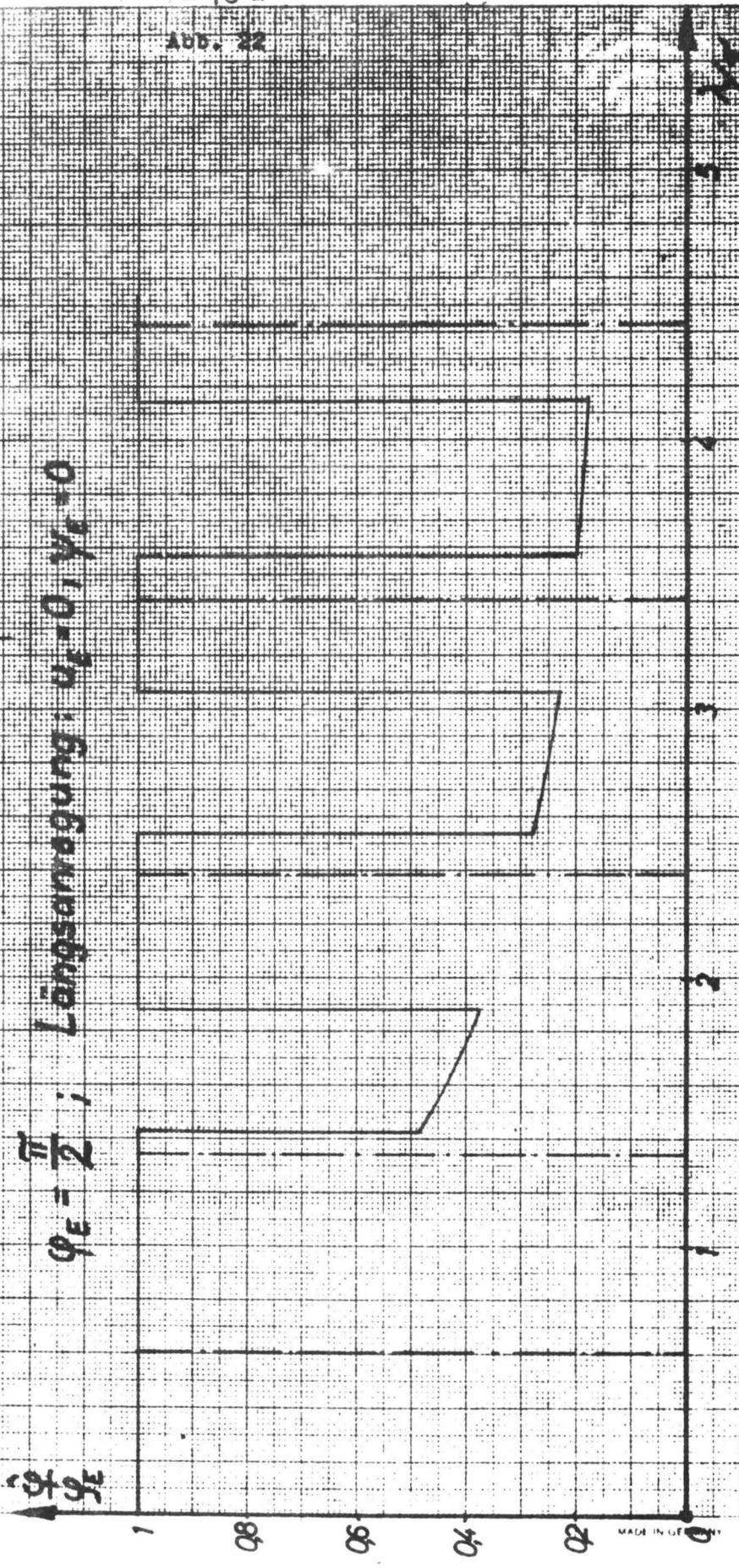
Da die Beanspruchungsfunktion im wesentlichen durch die trigonometrische Lösungsfunktion \mathcal{M}_1 (siehe Tabelle auf S.31) gebildet wird, bei der der Abstand der Nulldurchgänge $L_1 = \pi/n_1$ ist, gilt auf Grund von (2.66) für die Knotenabstände näherungsweise

$$L_{k_n} = \frac{\text{const}}{\sqrt{\omega}} .$$

Abb. 22

Einseitig eingespannter Stab
 Stelle der größten Beanspruchung in Abhängigkeit vom
 Frequenzparameter $\lambda = l \sqrt{\frac{E}{EI}} \sqrt{\omega}$. $\lambda = \text{Eigenfrequenzen}$

$\varphi_E = \frac{\pi}{2}$; Längsanregung: $u_E = 0,1 \varphi_E = 0$



MADE IN GERMANY

Abb. 23

Einseitig eingespannter Stab
 Stelle der größten Beanspruchung in Abhängigkeit vom
 Frequenzparameter $\lambda = l \sqrt{\frac{\rho F}{EJ}} \sqrt{\omega}$.
 = Eigenfrequenzen

$\varphi_E = \frac{3}{4} \pi$; Längsanregung : $u_E = 0, \varphi_E = 0$

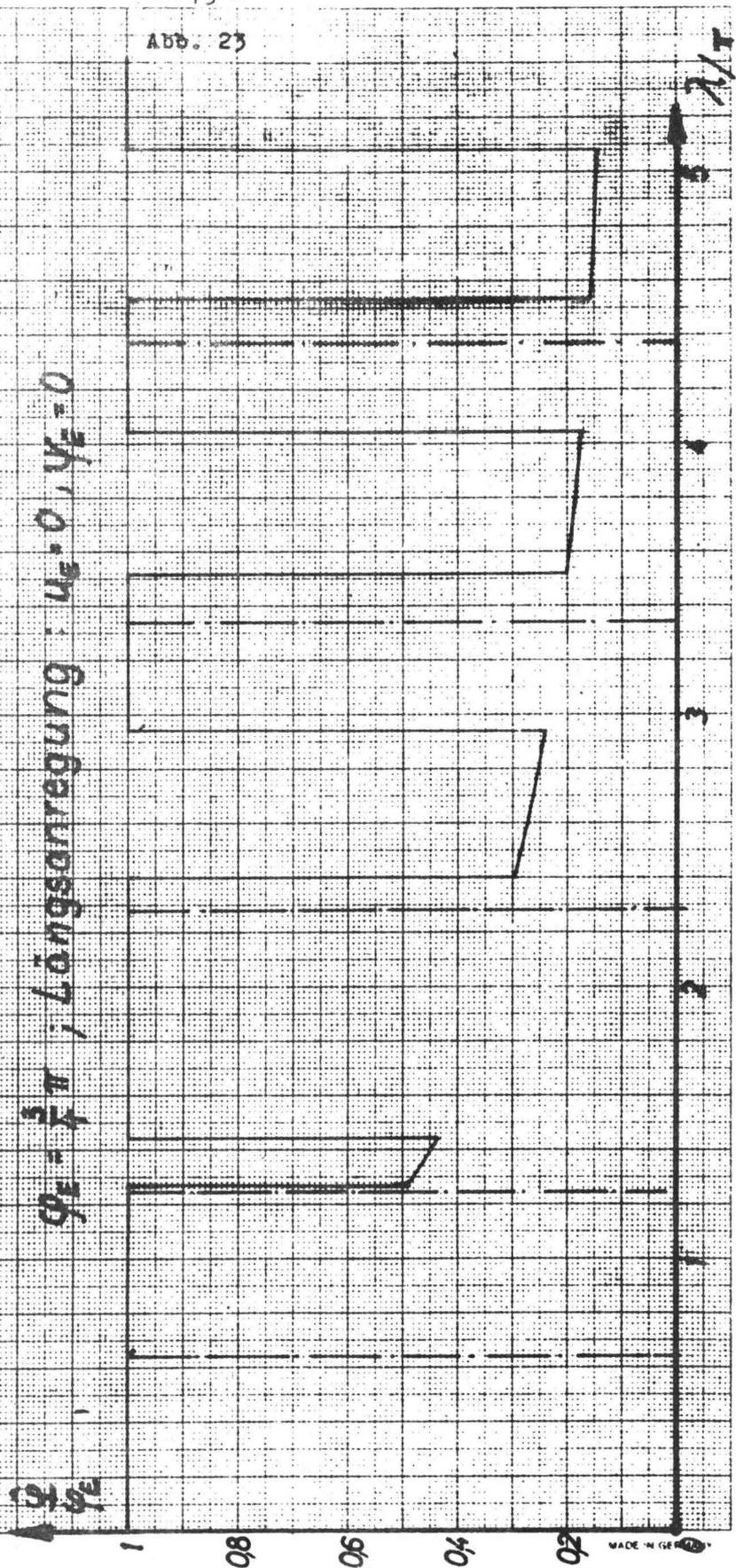
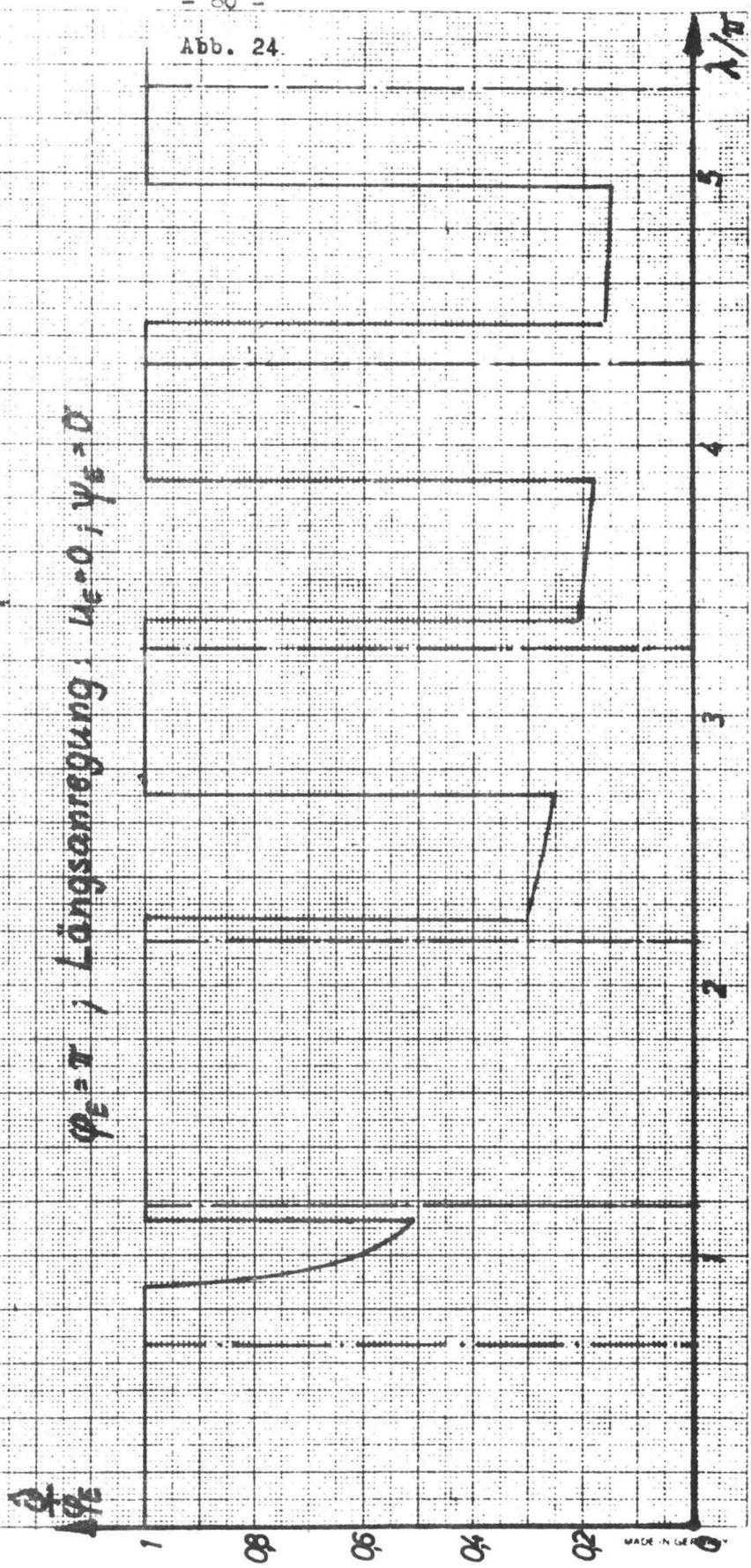


Abb. 24.

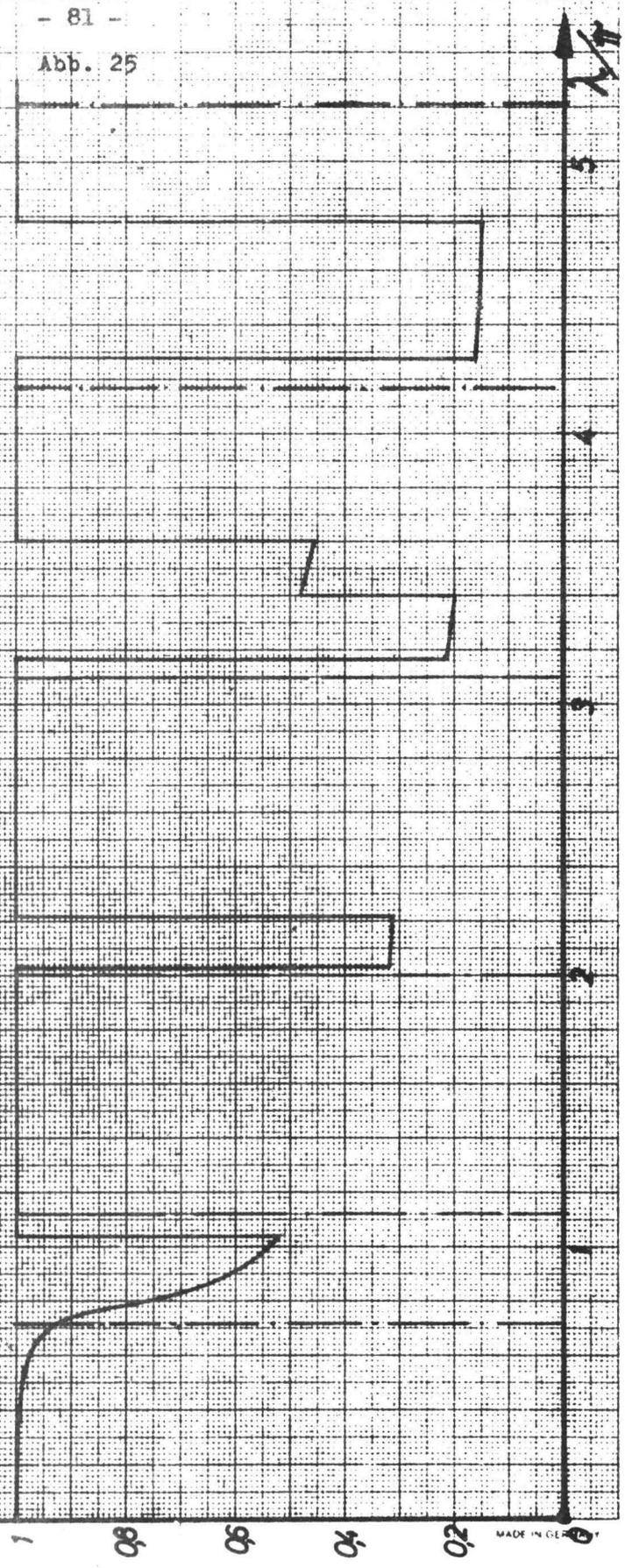
Einseitig eingespannter Stab
 Stelle der größten Beanspruchung in Abhängigkeit vom
 Frequenzparameter $\lambda = l \sqrt{\frac{\rho F}{EJ}} \sqrt{\omega}$. $|\cdot|$ = Eigenfrequenz

$\varphi_E = \pi$; Längsanregung: $u_E = 0$; $\psi_E = 0$



Einseitig eingespannter Stab
 Stelle der größten Beanspruchung in Abhängigkeit vom
 Frequenzparameter $\lambda = l \sqrt{\frac{\rho E}{E I}}$
 = Eigenfrequenzen

$\psi_E = \frac{1}{3} \pi$; Längsanregung: $\psi_E = 0, \psi_E = \pi$



Einseitig eingespannter Stab

Stelle der größten Beanspruchung in Abhängigkeit vom Frequenzparameter $\lambda = L \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}}$.
 = Eigenfrequenz

$\eta_1 = 4,5 \pi$; Längsanregung $u_T = 0, \psi_T = 0$

82
 Abb. 26

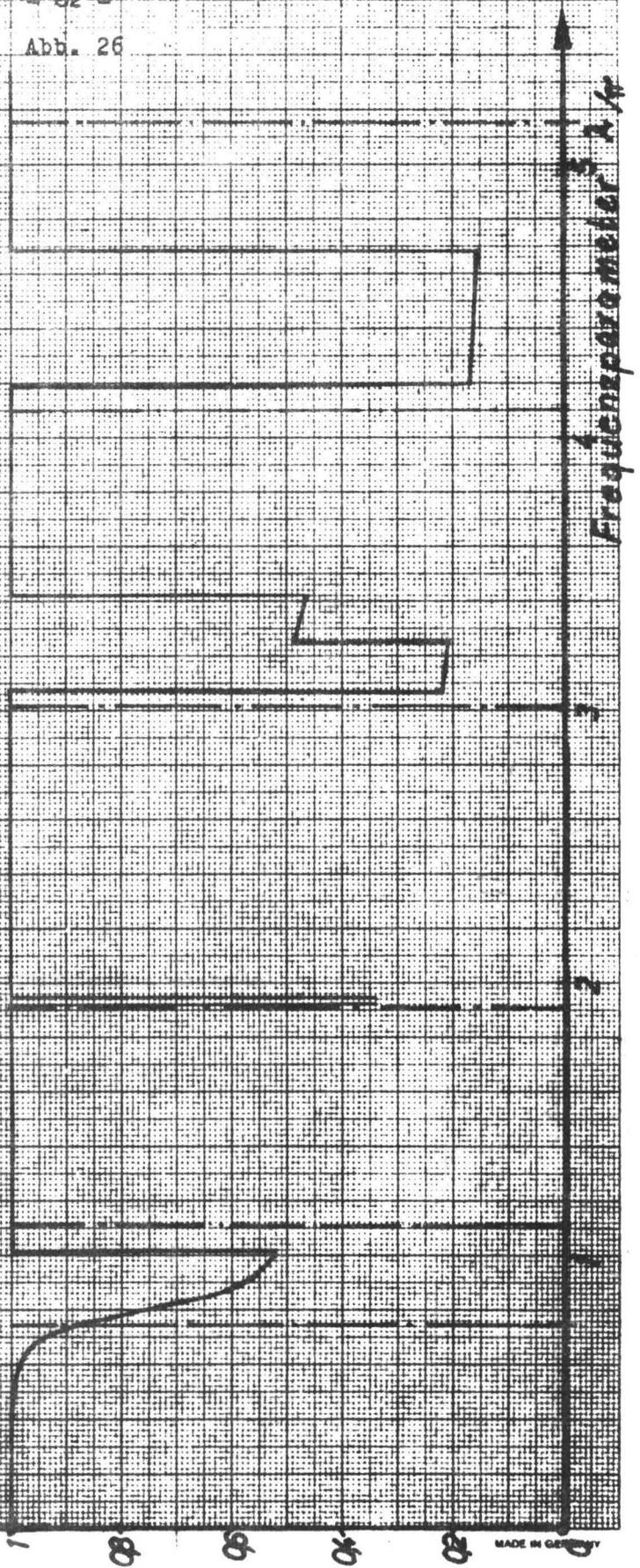
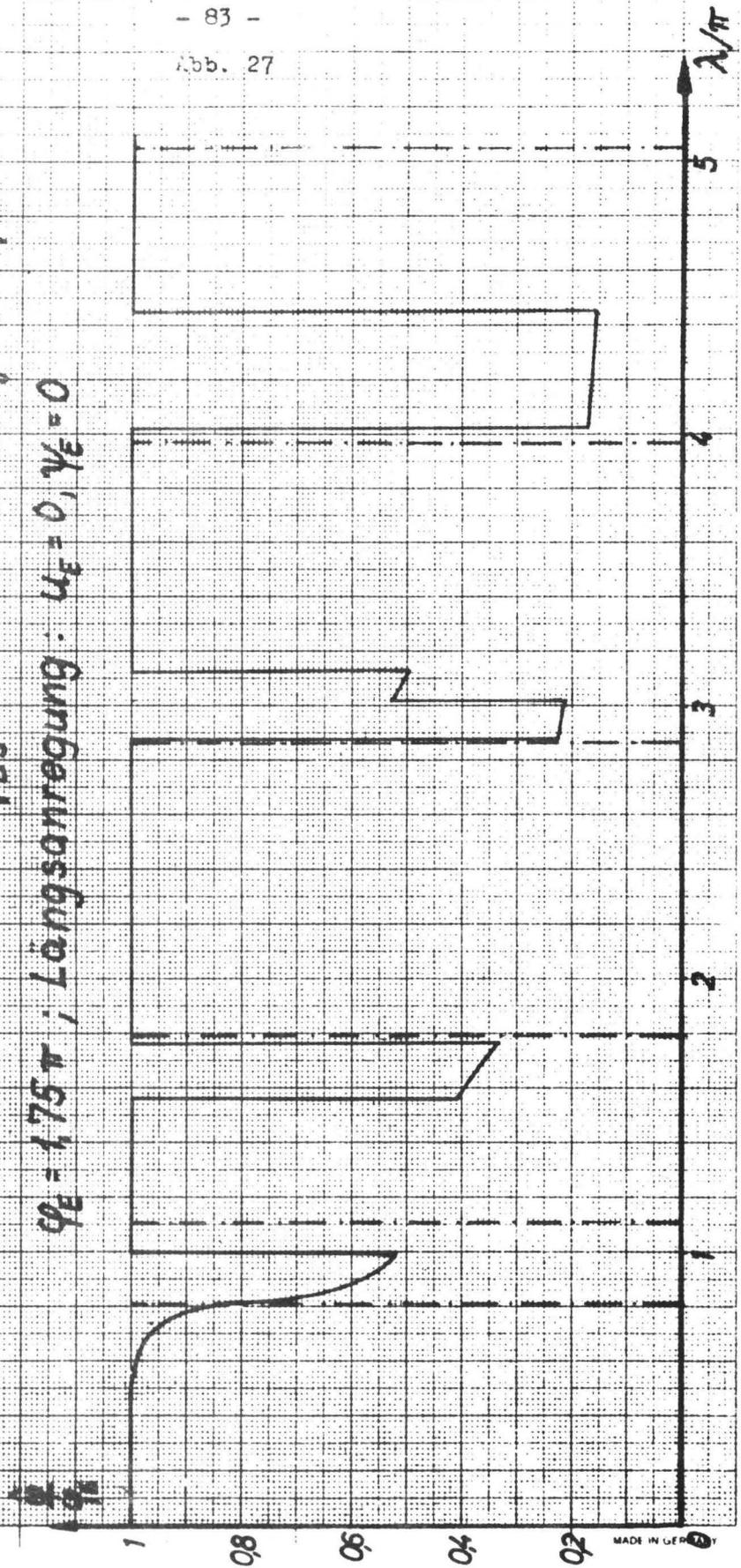


Abb. 27

Einseitig eingespannter Stab
 Stelle der größten Beanspruchung in Abhängigkeit vom
 Frequenzparameter $\lambda = l \sqrt{\frac{\rho E}{E I}}$ ω .
 Eigenfrequenzen

$\varphi_E = 1,75 \pi$; Längsanregung: $u_E = 0, \psi_E = 0$



Einseitig eingespannter Stab

Stelle der größten Beanspruchung in Abhängigkeit vom

Frequenzparameter $\lambda = l \sqrt{\frac{\rho E}{E I}} \sqrt{\omega}$.

| = Eigenfrequenzen

$\varphi_2 = 2\pi$; Längsanregung: $u_2 = 0, \varphi_2 = 0$

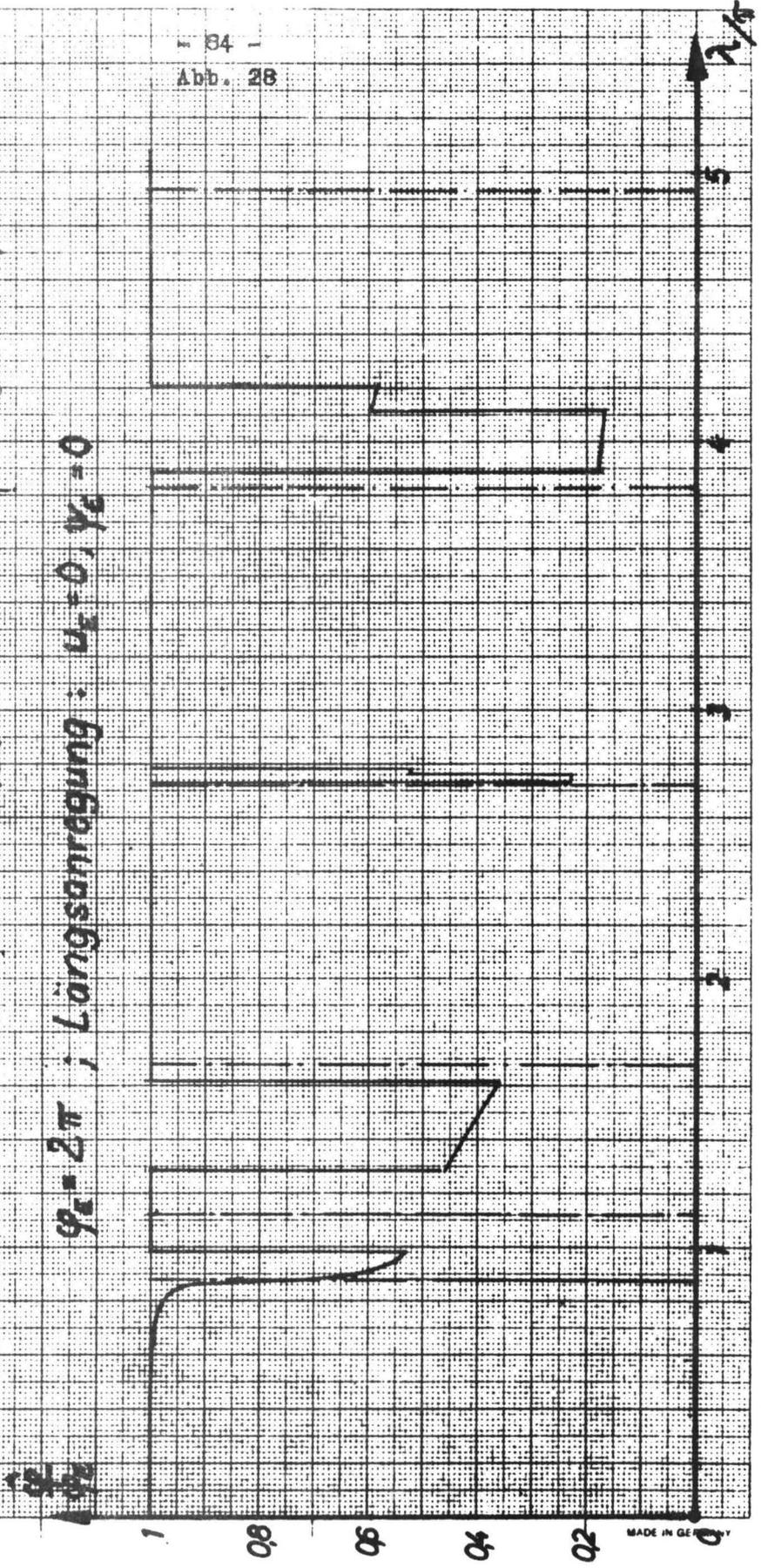


Abb. 29

Einseitig eingespannter gerader Stab, Querveranregung
 Stelle der größten Beanspruchung in Abhängigkeit vom
 Frequenzparameter $\lambda = l/\sqrt{EI}$

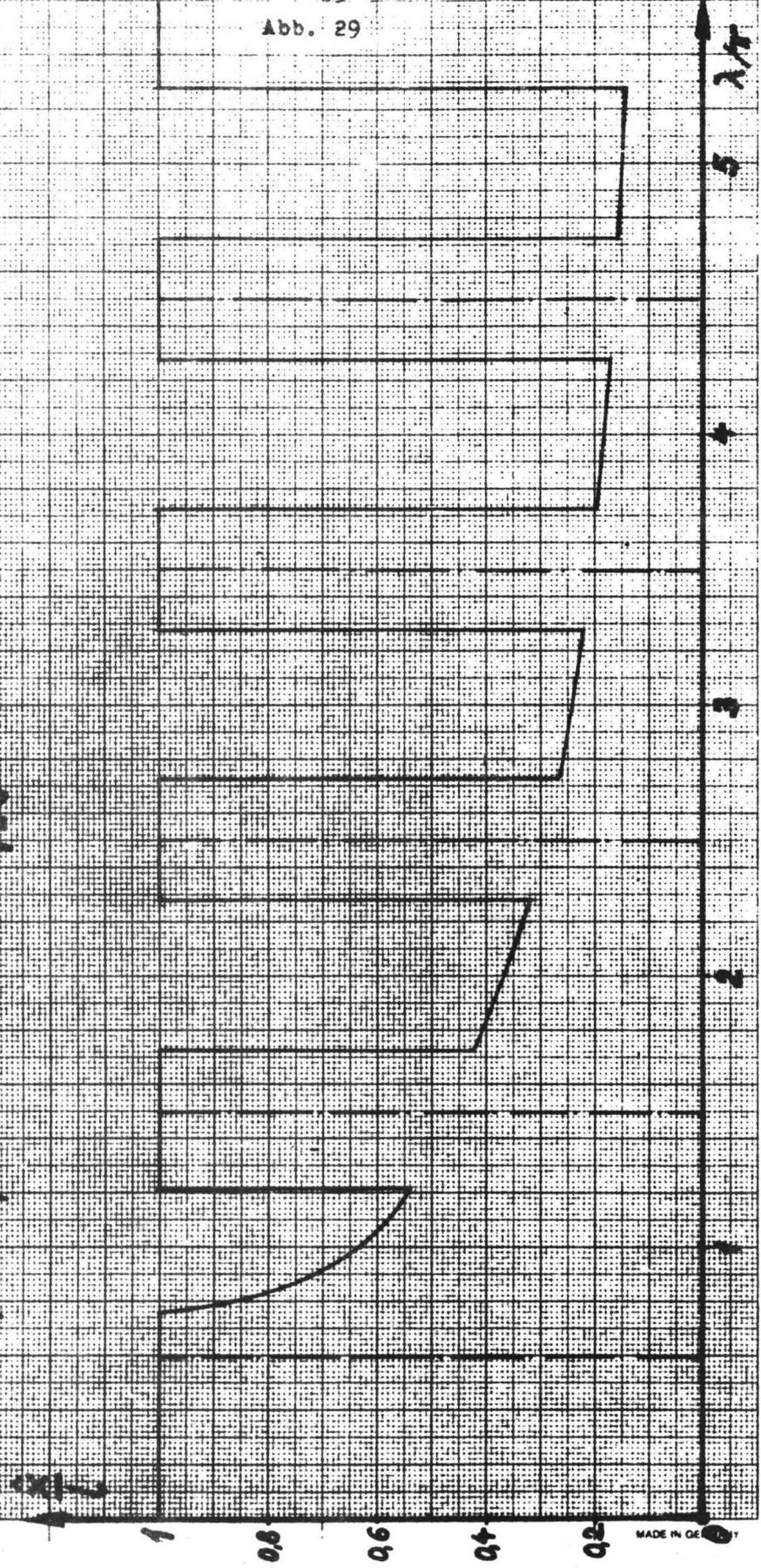
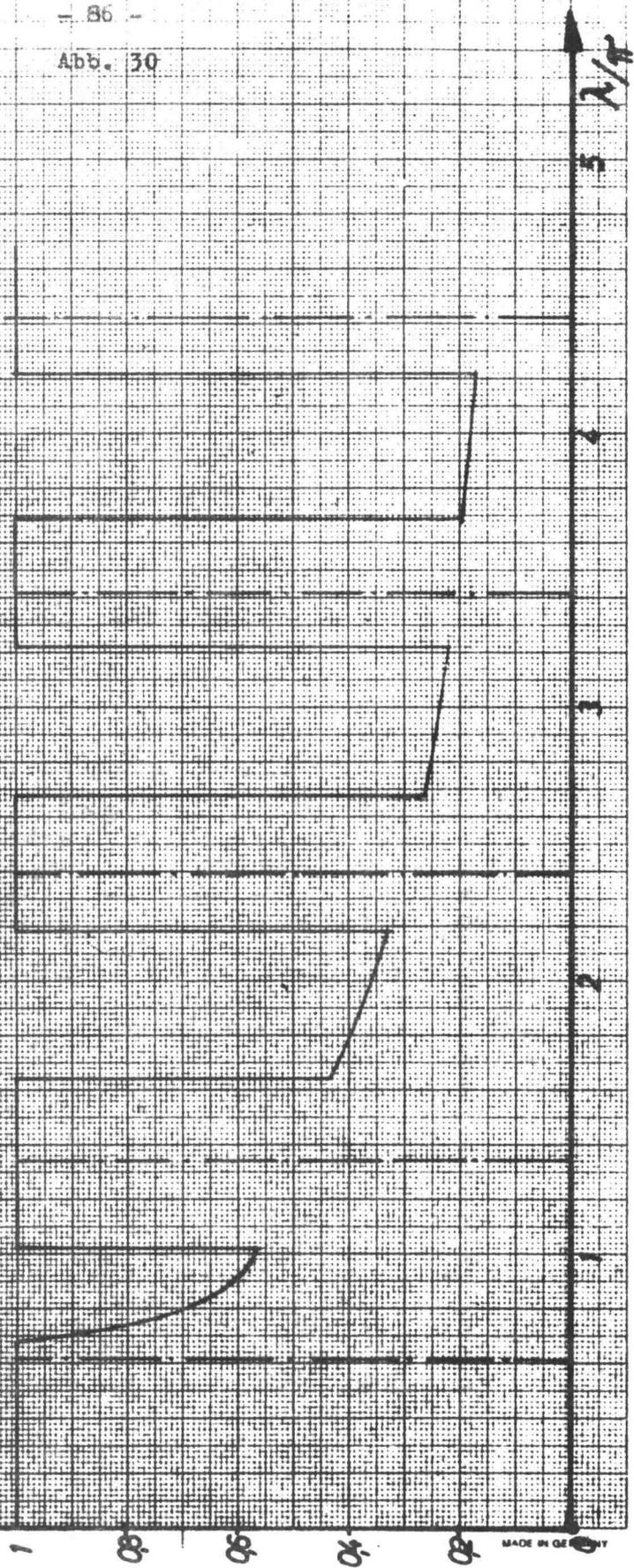


Abb. 30

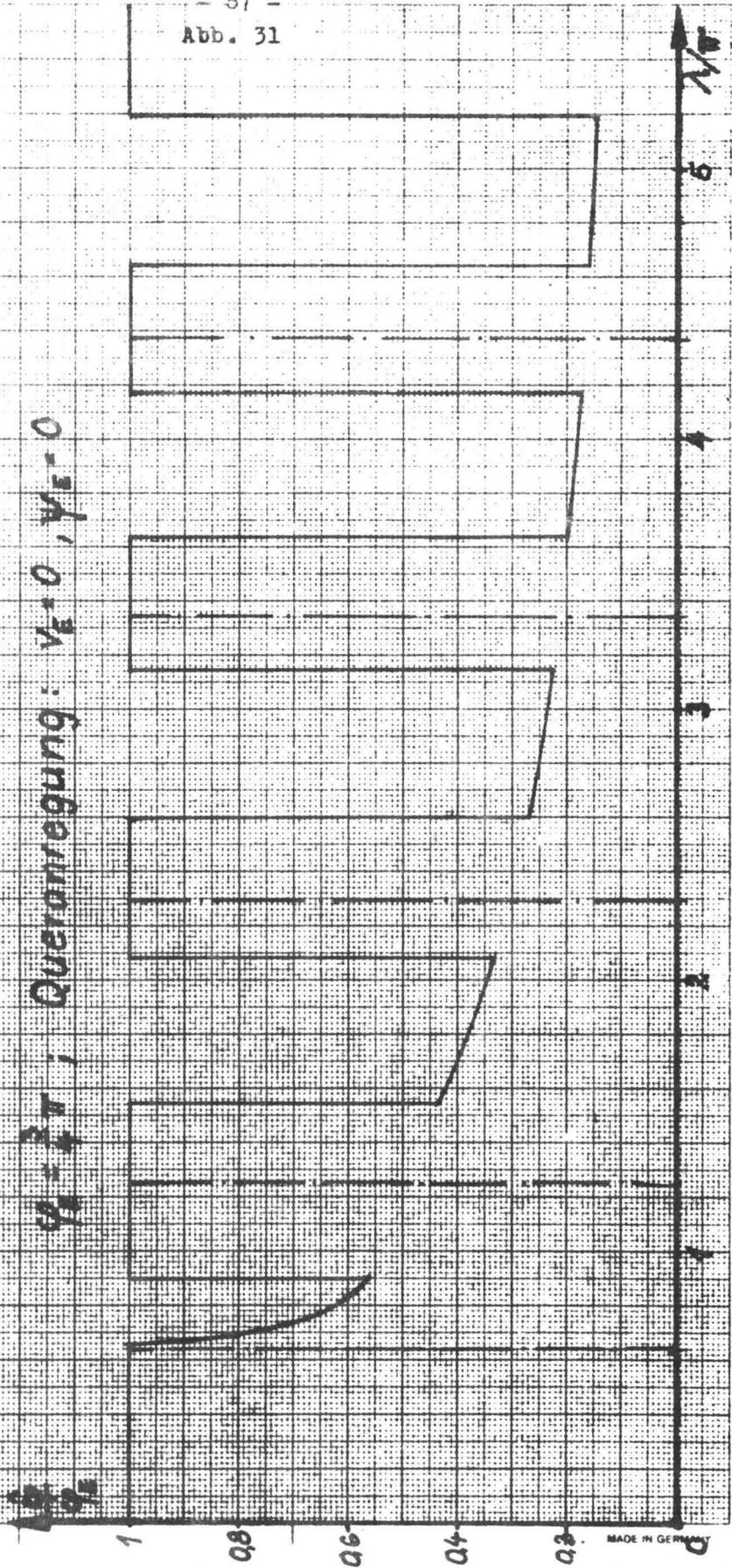
Einseitig eingespannter Stab
 Stelle der größten Beanspruchung in Abhängigkeit vom
 Frequenzparameter $\lambda = l \sqrt{\frac{F}{EJ}}$ $l =$ Eigenfrequenzen

$\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$; Queranregung: $\gamma_1 = 0, \gamma_5 = 0$



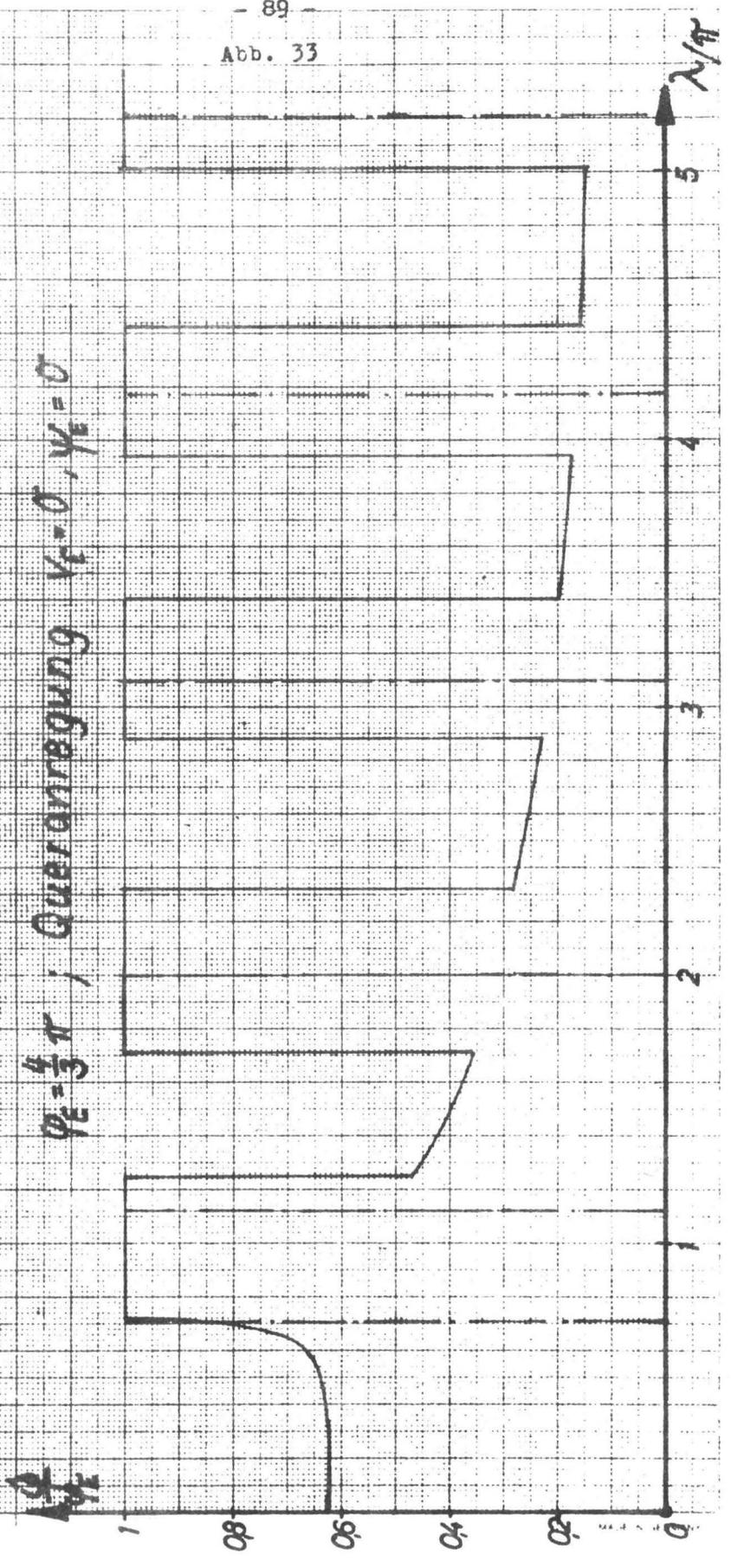
Einseitig eingespannter Stab
 Stelle der größten Beanspruchung in Abhängigkeit vom
 Frequenzparameter $\lambda = l \sqrt{\frac{EJ}{EI_0}} \omega$.
 = Eigenfrequenzen

$\psi_E = \frac{3}{4}\pi$; Queranregung: $\psi_E = 0, \psi_E = \pi$



Einseitig eingespannter Stab
 Stelle der größten Beanspruchung in Abhängigkeit vom
 Frequenzparameter $\lambda = \sqrt{\frac{E I}{\rho A}} \frac{\omega}{c}$
 = Eigenfrequenz

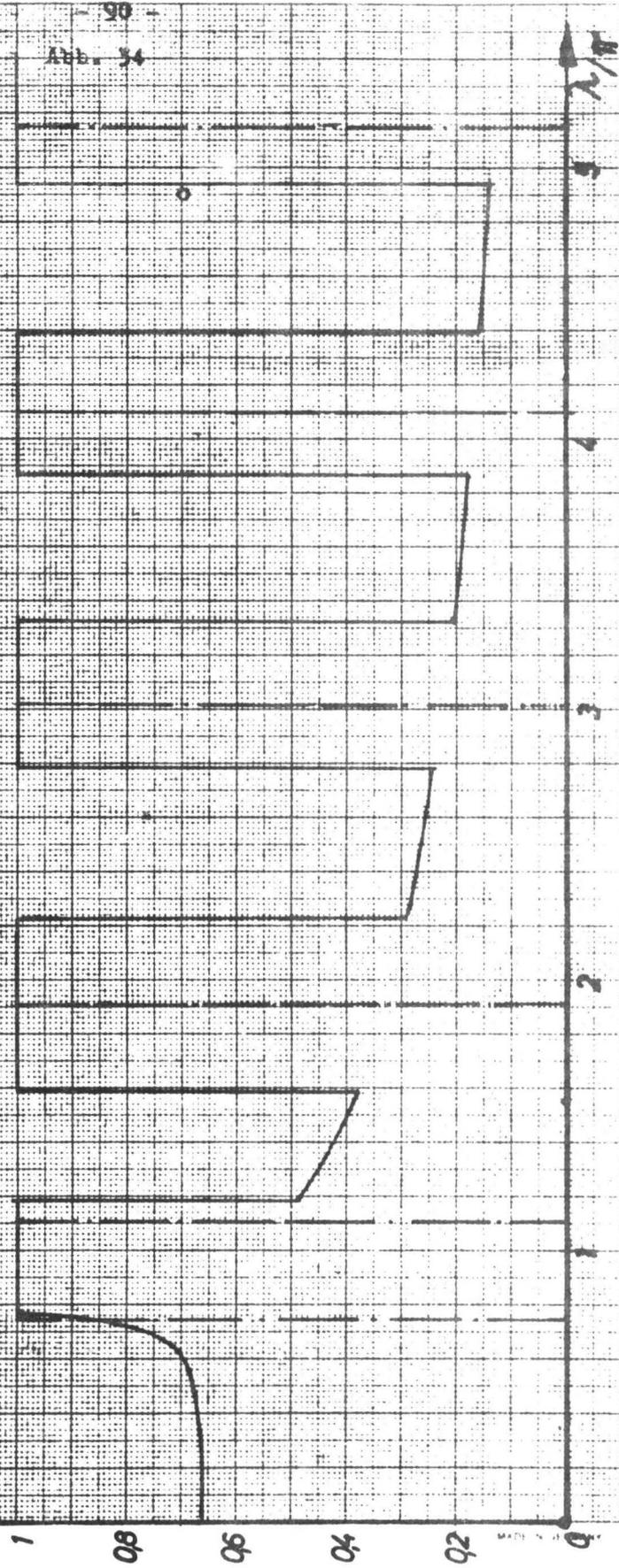
$\varphi_E = \frac{4}{3}\pi$; Queranregung $\varphi_E = 0, \psi_E = 0$



Einseitig eingespannter Stab

Stelle der größten Beanspruchung in Abhängigkeit vom Frequenzparameter $\lambda = l \sqrt{\frac{\rho E}{E I}}$. l = Eigentreue

$\varphi_2 = 1,5\pi$; Querverformung $v_2 = 0$, $\varphi_2 = 0$



Einseitig eingespannter Stab
 Stelle der größten Beanspruchung in Abhängigkeit vom
 Frequenzparameter $\lambda = l \sqrt{\frac{EF}{EI}} \sqrt{\omega}$. l = Eigenfrequenzen

$\varphi_0 = 175^\circ$; Queranregung: $v_0 = 0, \psi_0 = 0$

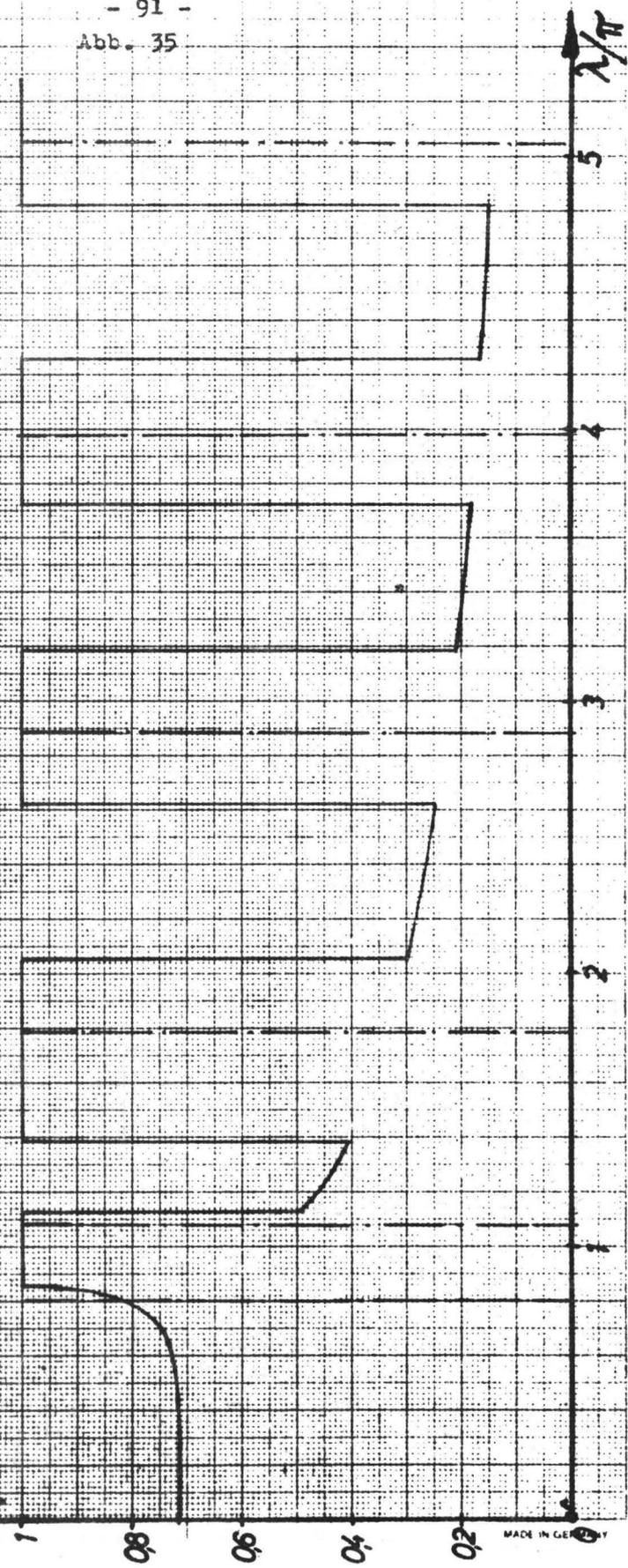
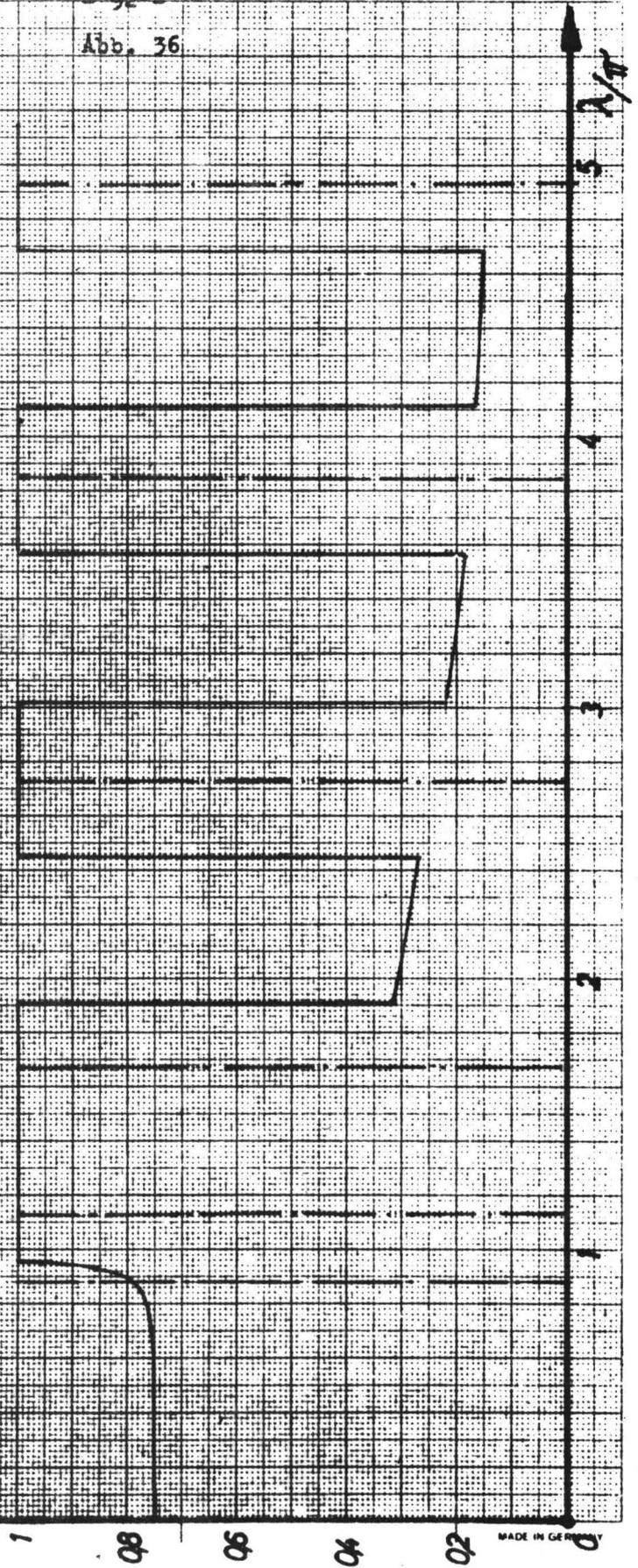


Abb. 36

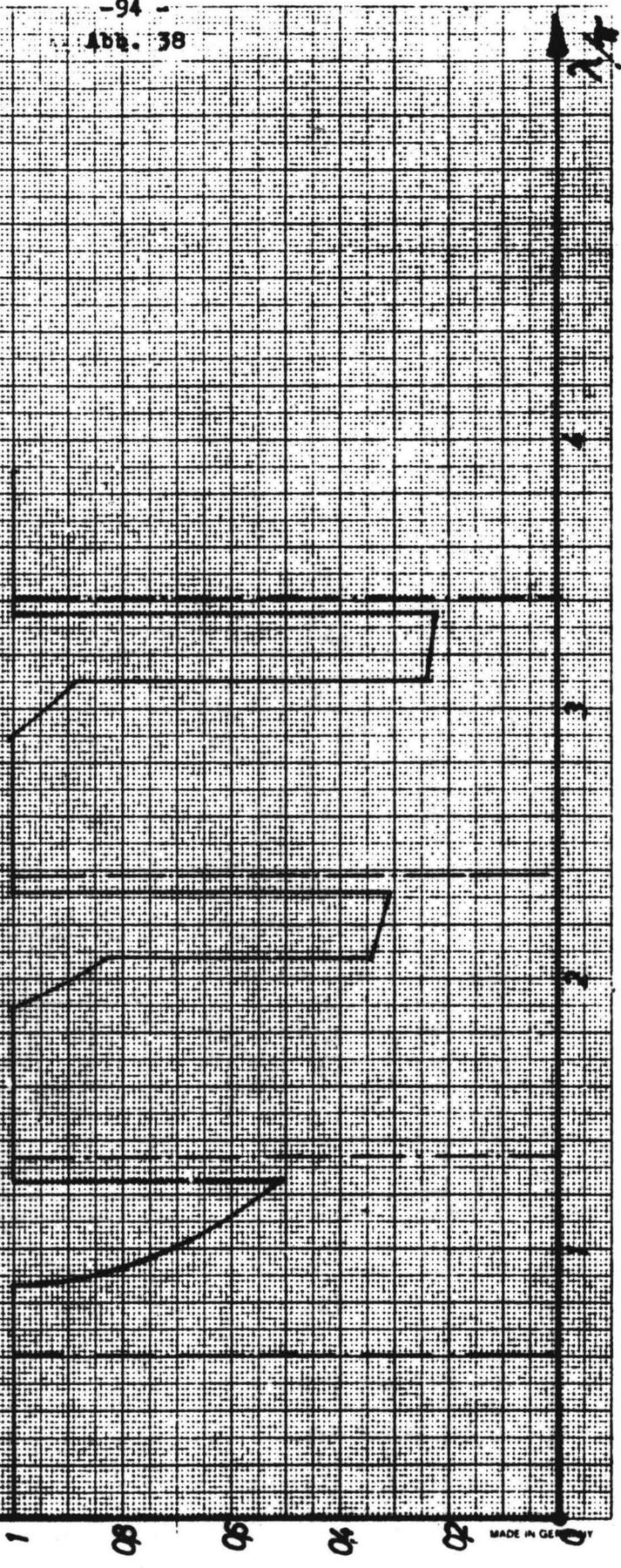
Einseitig eingespannter Stab
 Stelle der größten Beanspruchung in Abhängigkeit vom
 Frequenzparameter $\lambda = \sqrt{\frac{\rho g}{EJ}} l \omega$
 = Eigenfrequenzen

$\eta_1 = 2\pi$; Querspannung: $\eta_2 = 0, \eta_3 = 0$



Einseitig eingespannter Stab
 Stelle der größten Beanspruchung in Abhängigkeit vom
 Frequenzparameter $\lambda = l \sqrt{\frac{\rho A \omega^2}{E}}$ für $\nu = 0, \mu_2 = 0$

$\nu = 0$; Drehbiegung; $\nu = 0, \mu_2 = 0$



Einseitig eingespannter Stab
 Stelle der größten Beanspruchung in Abhängigkeit vom
 Frequenzparameter $\lambda = l \sqrt{\frac{E}{EI}}$ für $\nu = \text{Eigenfrequenzen}$

$\nu = \frac{2}{l} \tau$, Drehanregung $\nu = 0, \tau = 0$

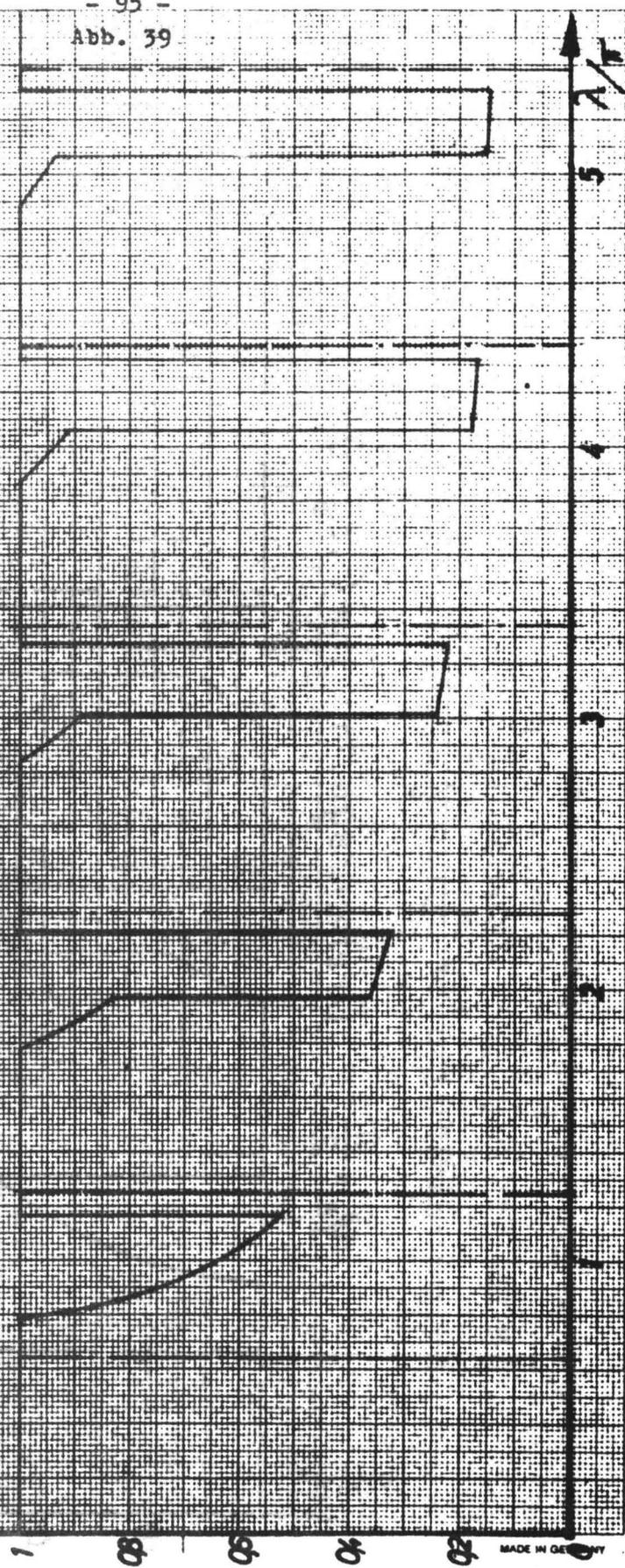


Abb. 40

Einseitig eingespannter Stab
 Stelle der größten Beanspruchung in Abhängigkeit vom
 Frequenzparameter $\lambda \cdot l$ für $\nu = 0$. $\nu =$ Eigenfrequenzen

$\nu_1 = \pi$; Drehanregung: $\nu_2 = 0, \nu_3 = 0$

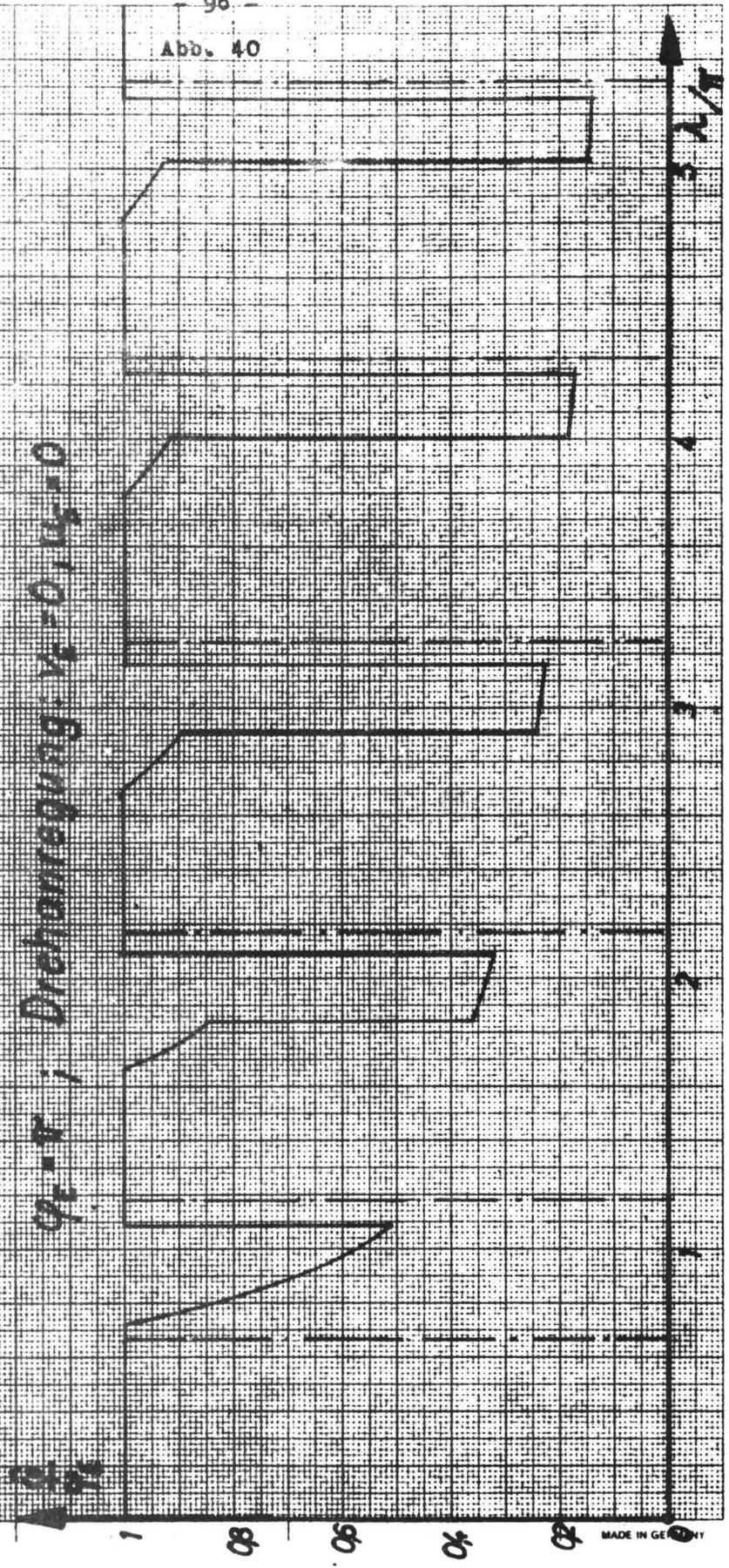


Abb. 41

Einseitig eingespannter Stab
 Stelle der größten Beanspruchung in Abhängigkeit vom
 Frequenzparameter $\lambda = L \sqrt{\frac{Y_E F}{E I}}$.
 $\lambda =$ Eigenfrequenzen

$\varphi_E = \frac{1}{3} \pi$; Drehanregung: $\nu_E = 0, \mu_E = 0$

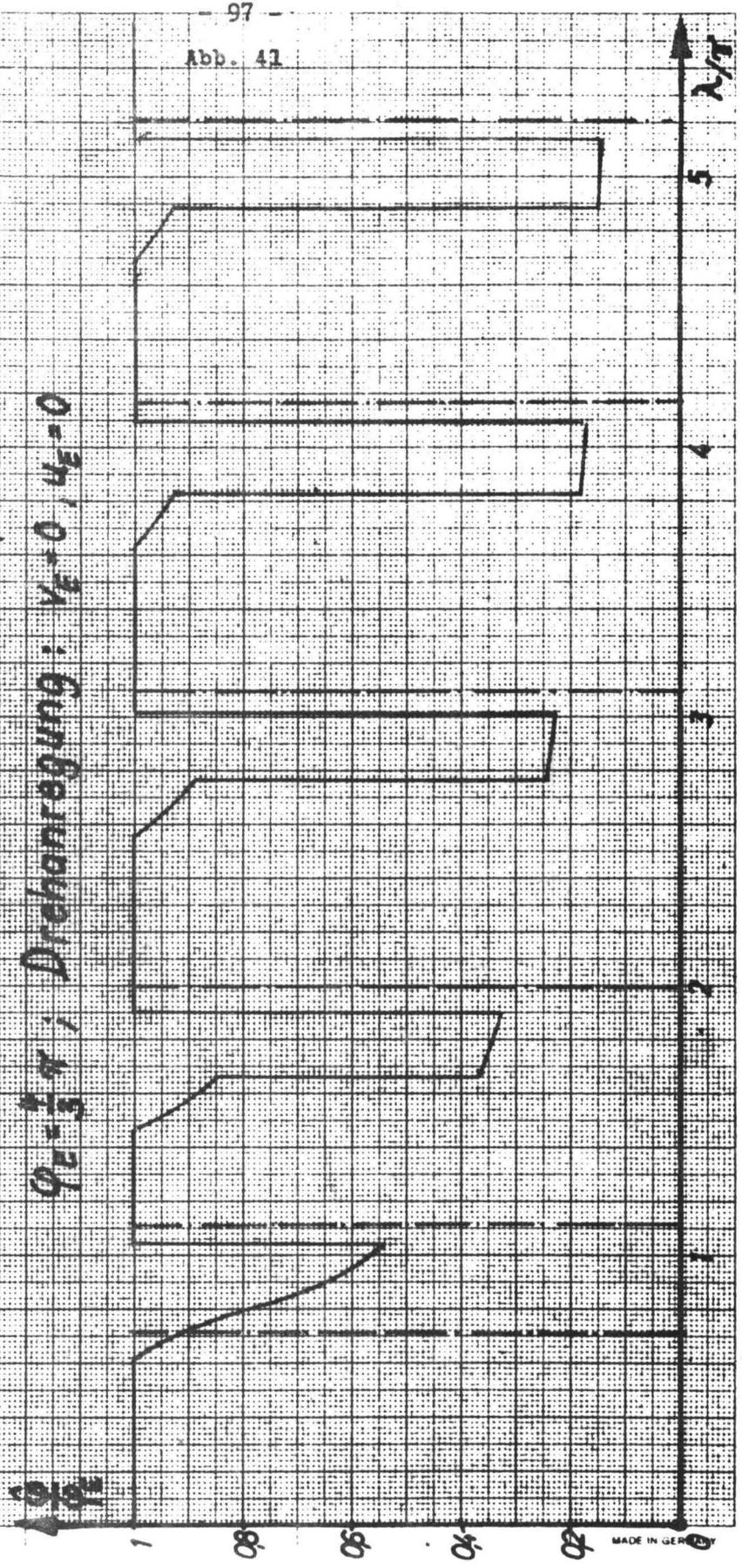


Abb. 42

Einseitig eingespannter Stab
 Stelle der größten Beanspruchung in Abhängigkeit vom
 Frequenzparameter $\lambda = L \sqrt{\frac{\omega^2}{EJ}}$. ω = Eigenfrequenzen

$\varphi_E = 15^\circ$; Drehanregung : $\nu_E = 0, \kappa_E = 0$

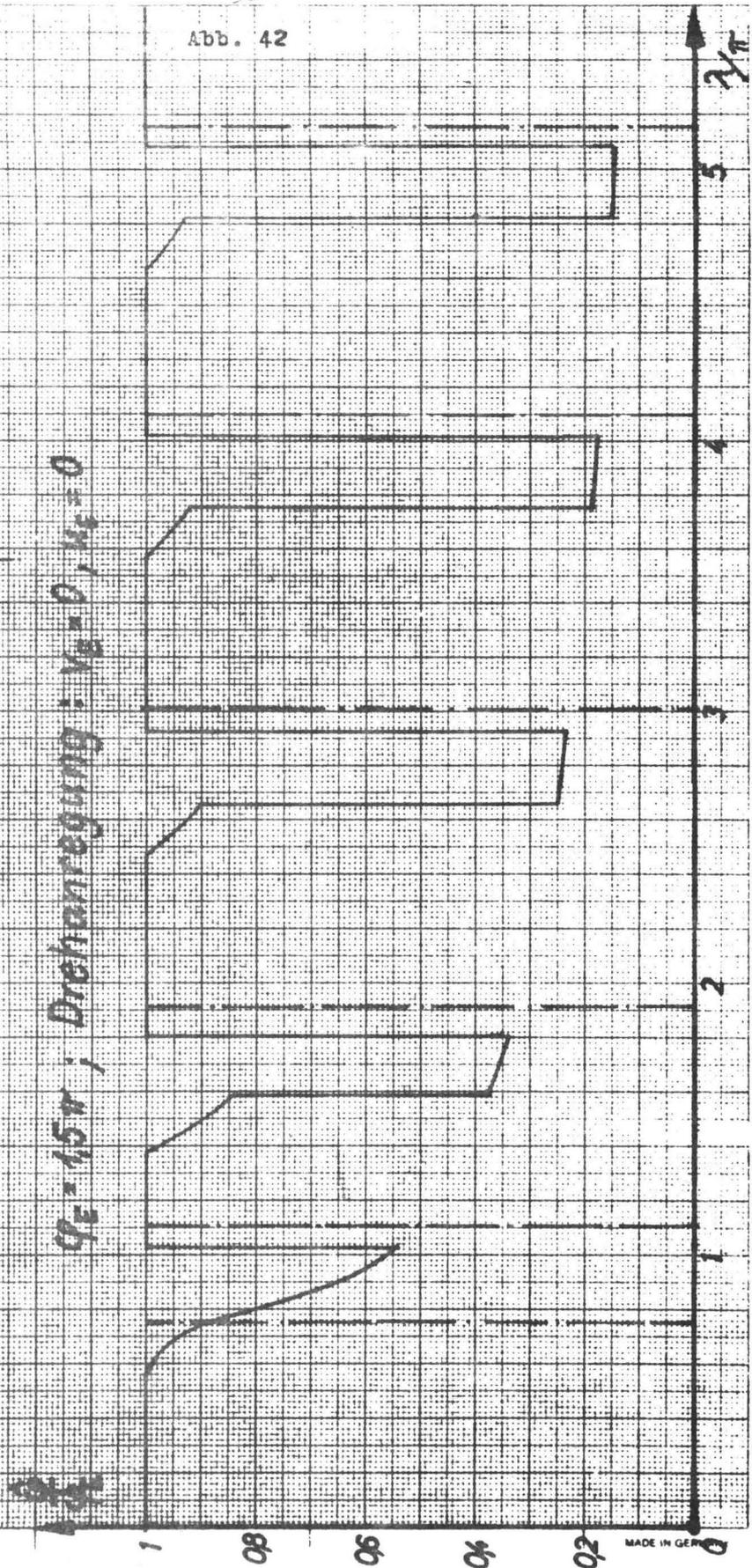
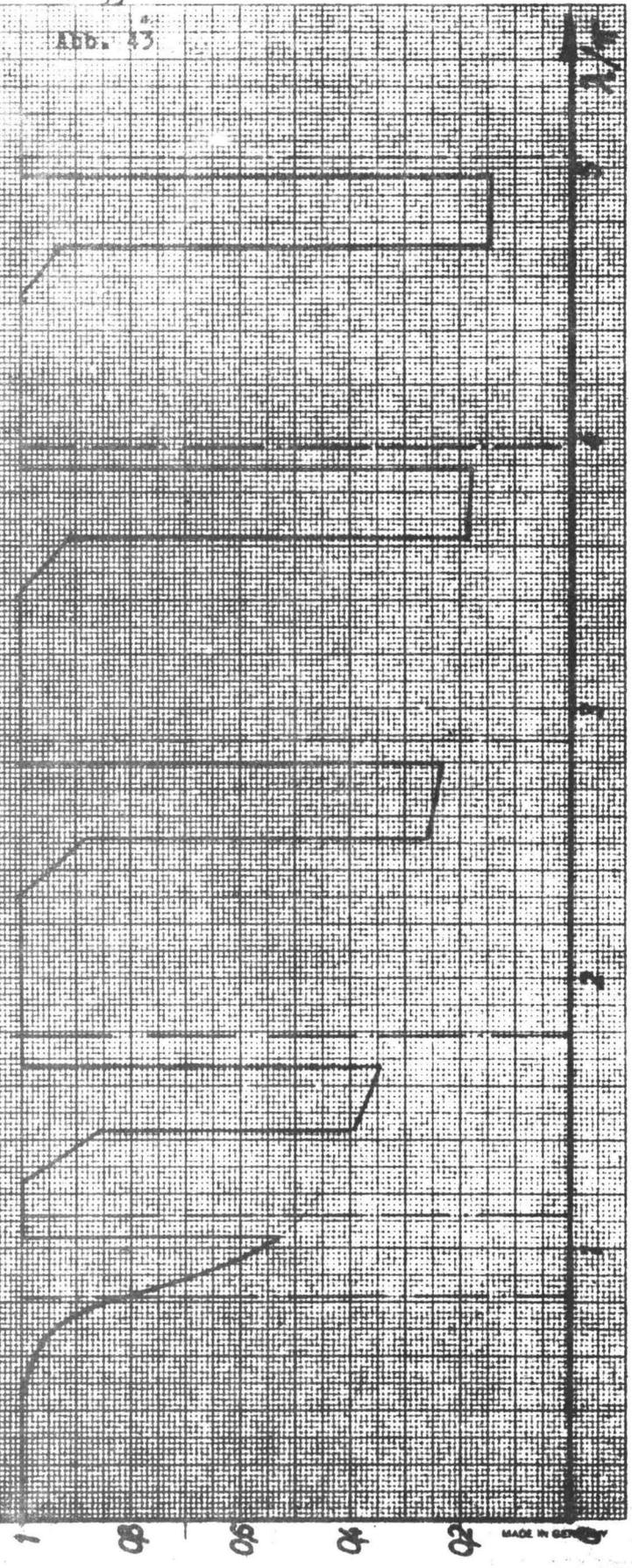


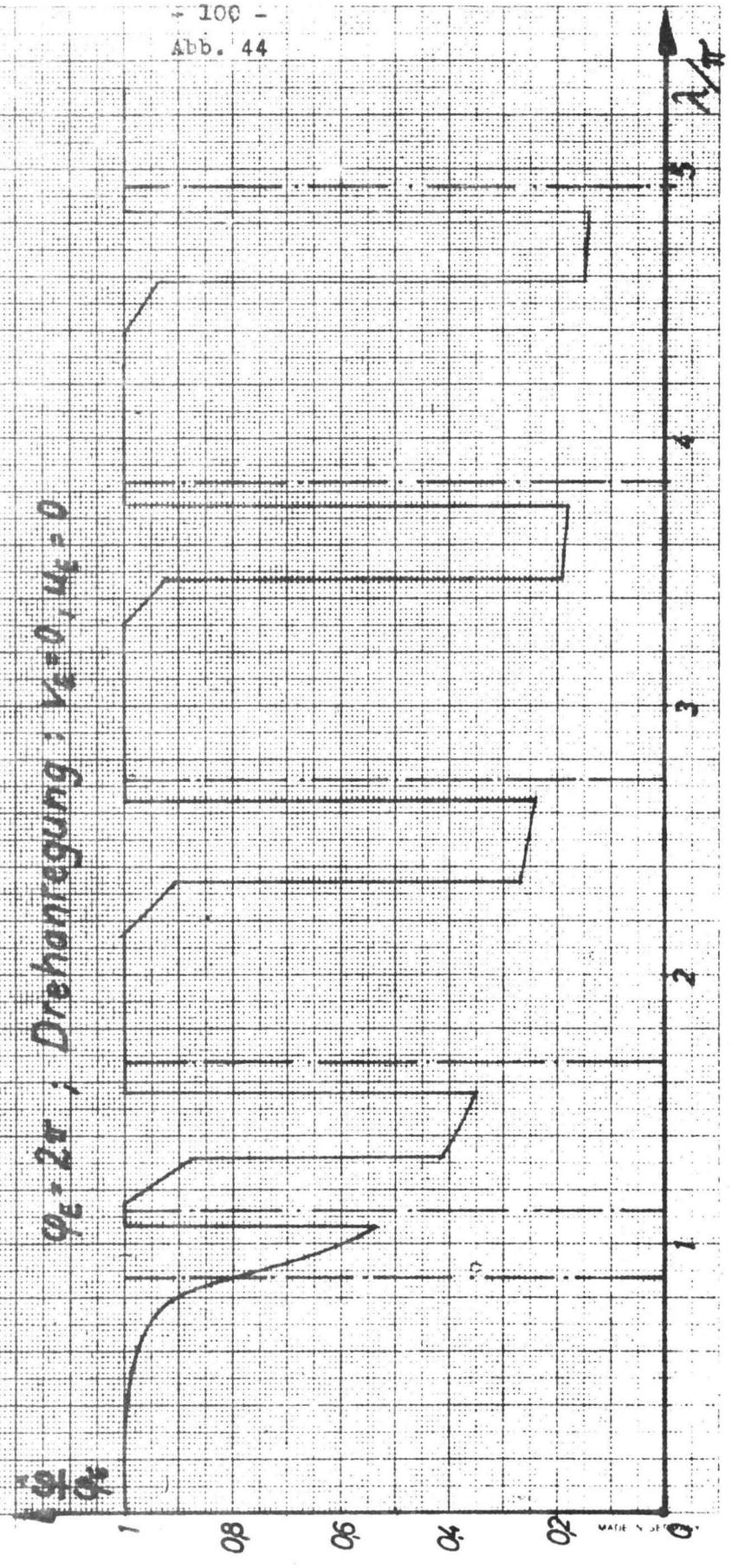
Abb. 43

Einseitig eingespannter Stab
 Stelle der größten Beanspruchung in Abhängigkeit von
 Frequenzparameter $\lambda = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$
 $\rho = 1,707$; $Drehmoment = 1,0000$



Einseitig eingespannter Stab
 Stelle der größten Beanspruchung in Abhängigkeit vom
 Frequenzparameter $\lambda = l \sqrt{\frac{E I}{E I}}$; Eigenfrequenzen

$\varphi_l = 2\pi$; Drehanregung : $\varphi_l = 0, \mu_l = 0$



Einseitig eingespannte Stäbe,
Längsanregung (Fall A)

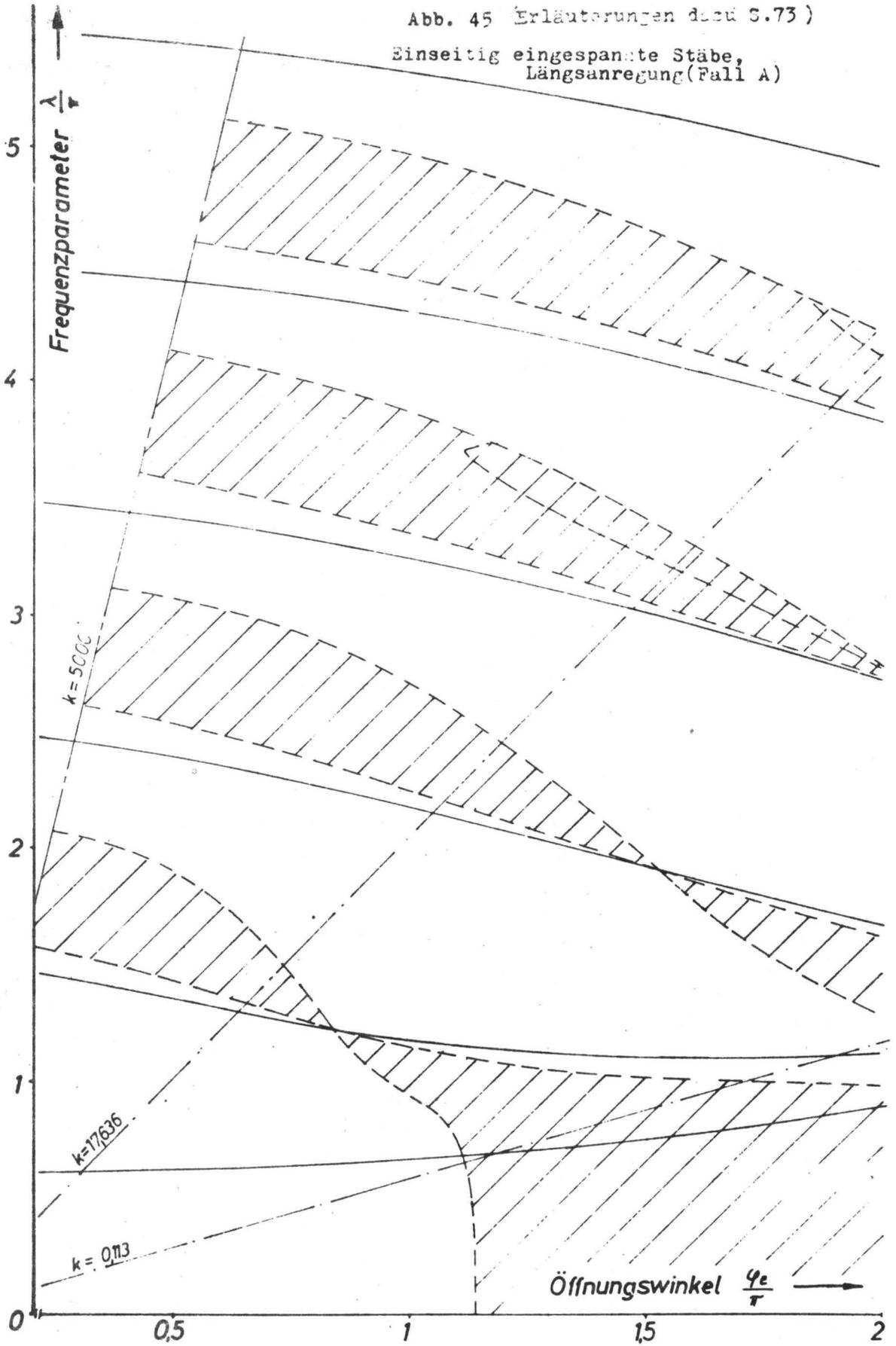


Abb. 46 (Erläuterungen dazu S.73)

Einseitig eingespannte Stäbe,
ueranregung (Fall B)

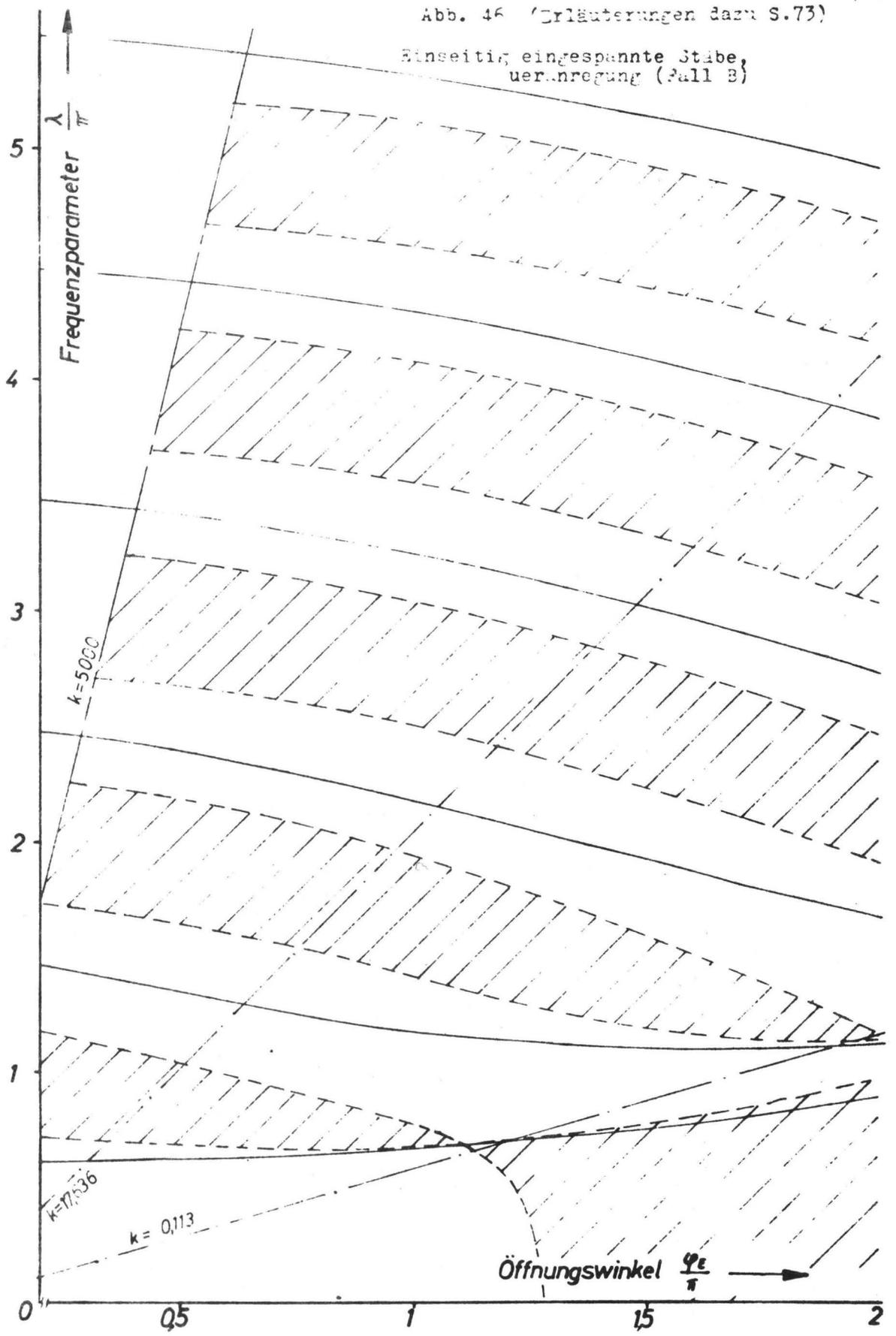
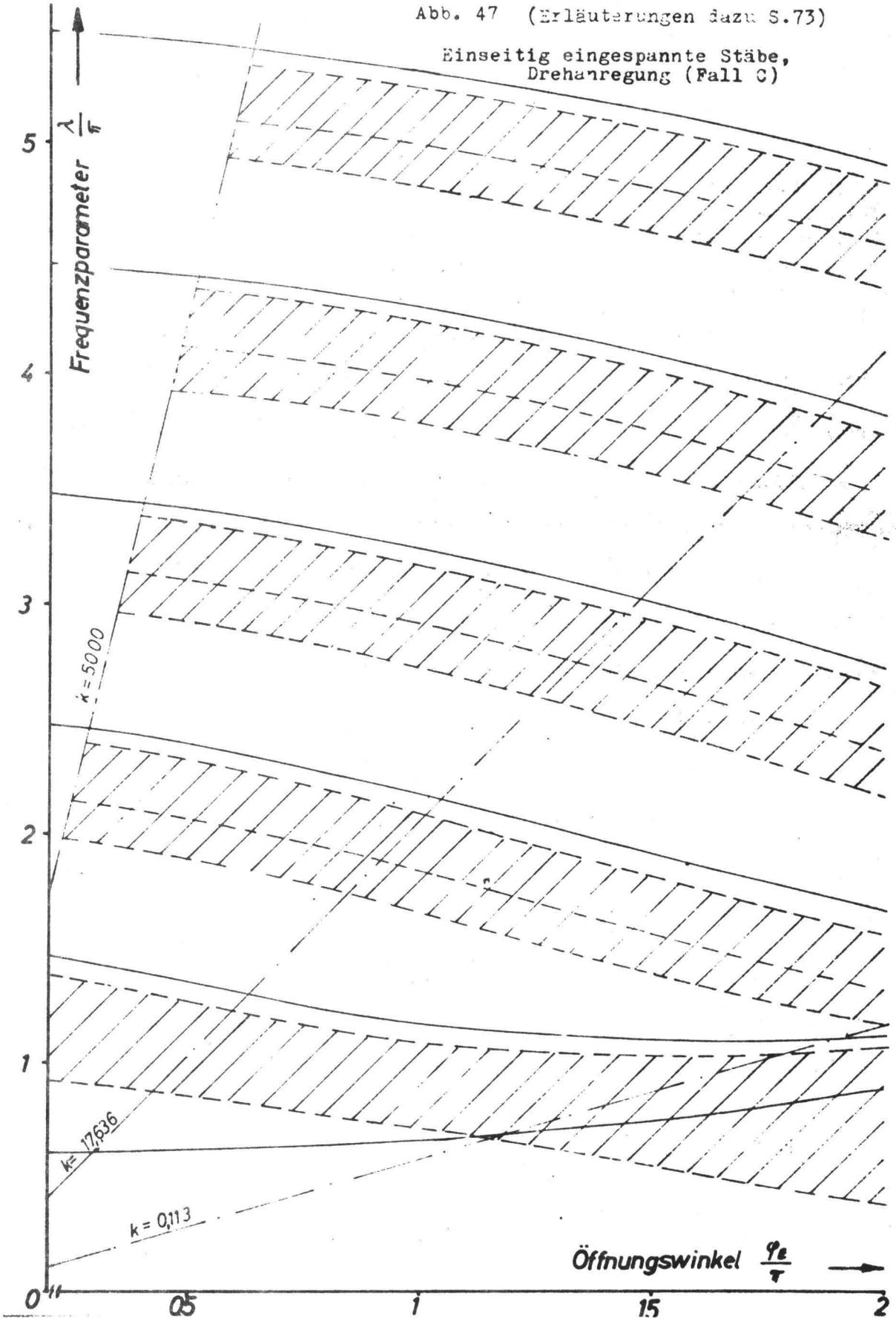


Abb. 47 (Erläuterungen dazu S.73)

Einseitig eingespannte Stäbe,
Drehanregung (Fall C)



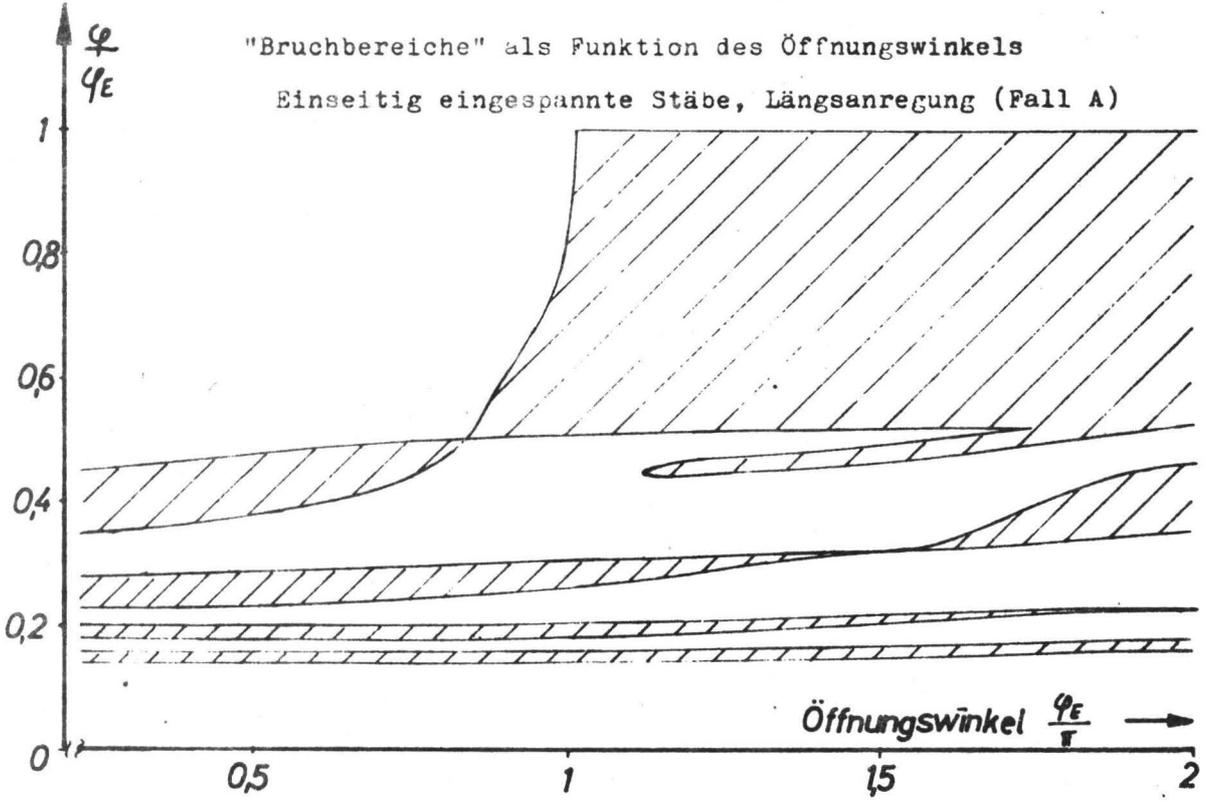


Abb. 48

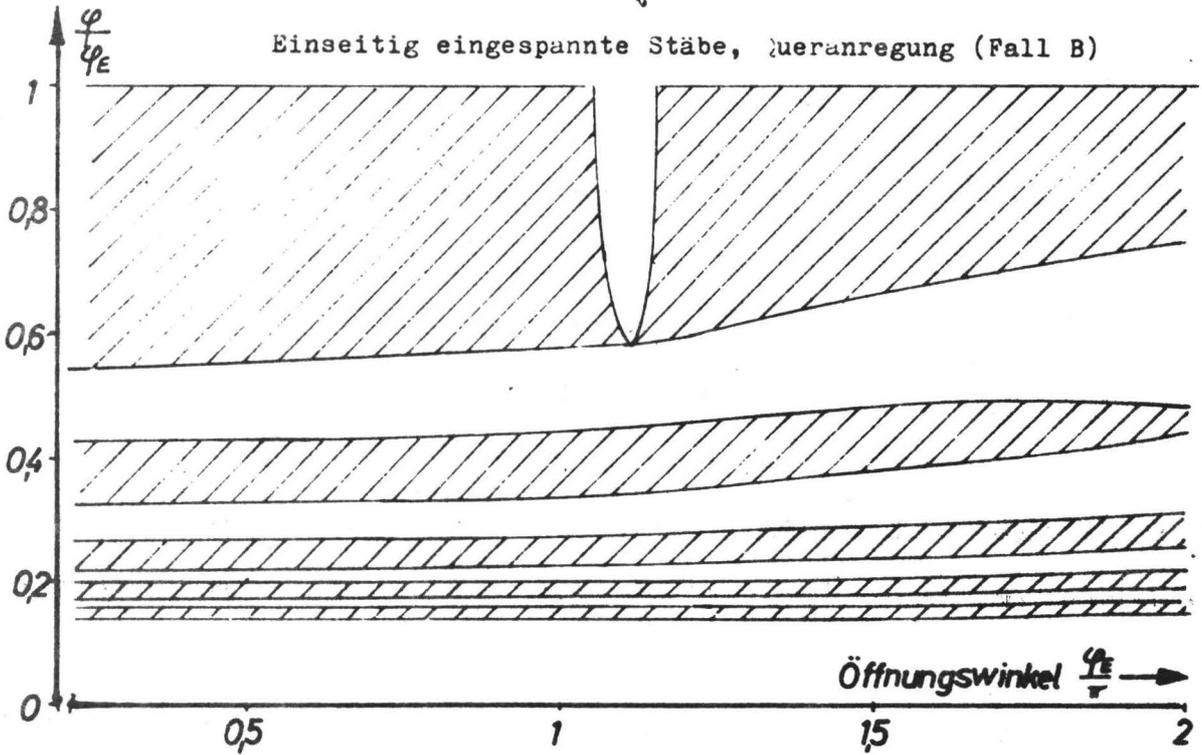


Abb. 49

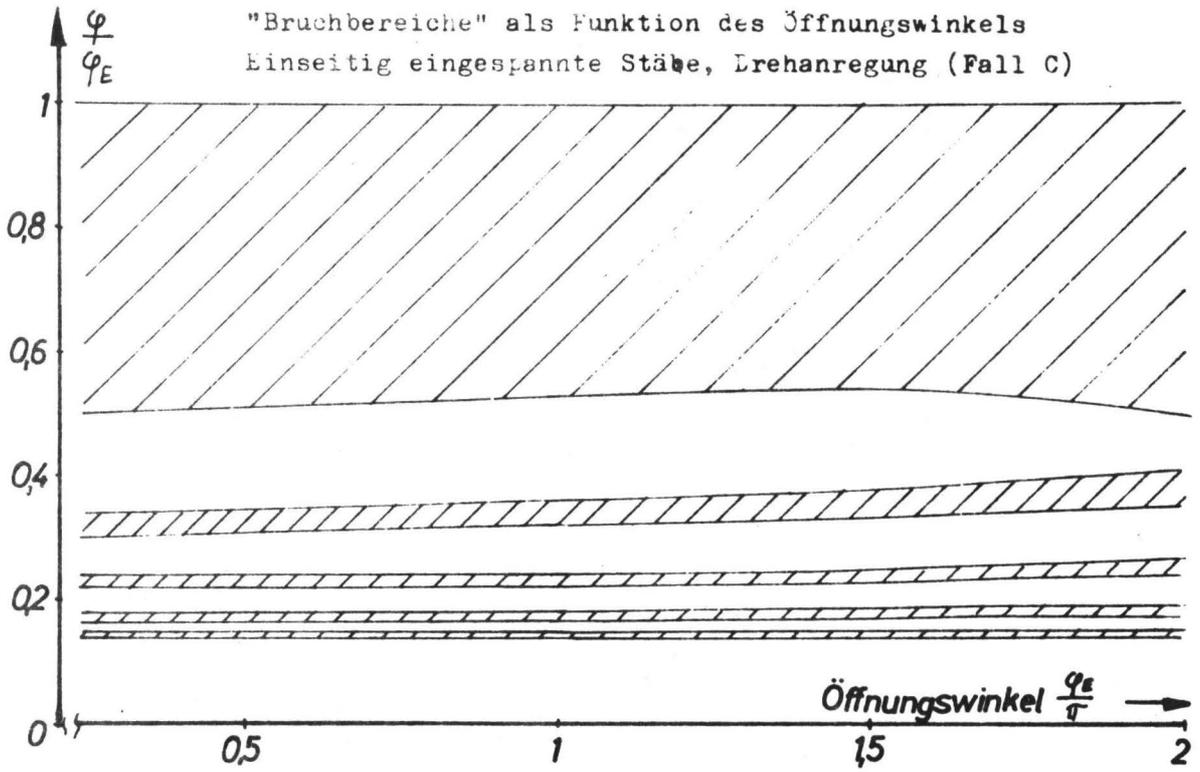
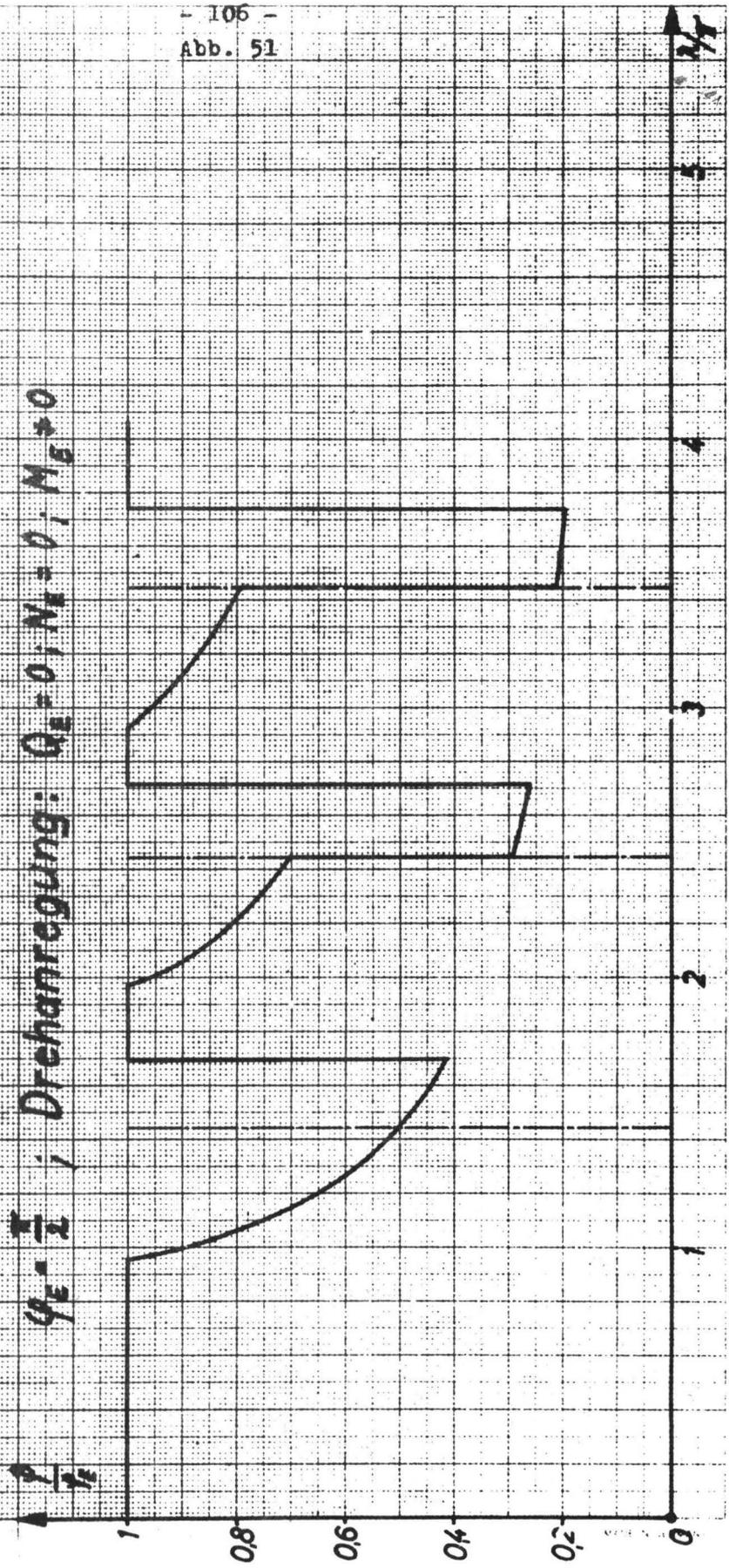


Abb. 50

Beidseitig freier Stab

$q_E = \frac{1}{2}$; Drehanregung: $Q_E = 0$; $N_E = 0$; $M_E \neq 0$



Beidseitig freier Stab

$\varphi_E = 0,75\pi$; Drehanregung: $Q_E = 0, N_E = 0, M_E \neq 0$

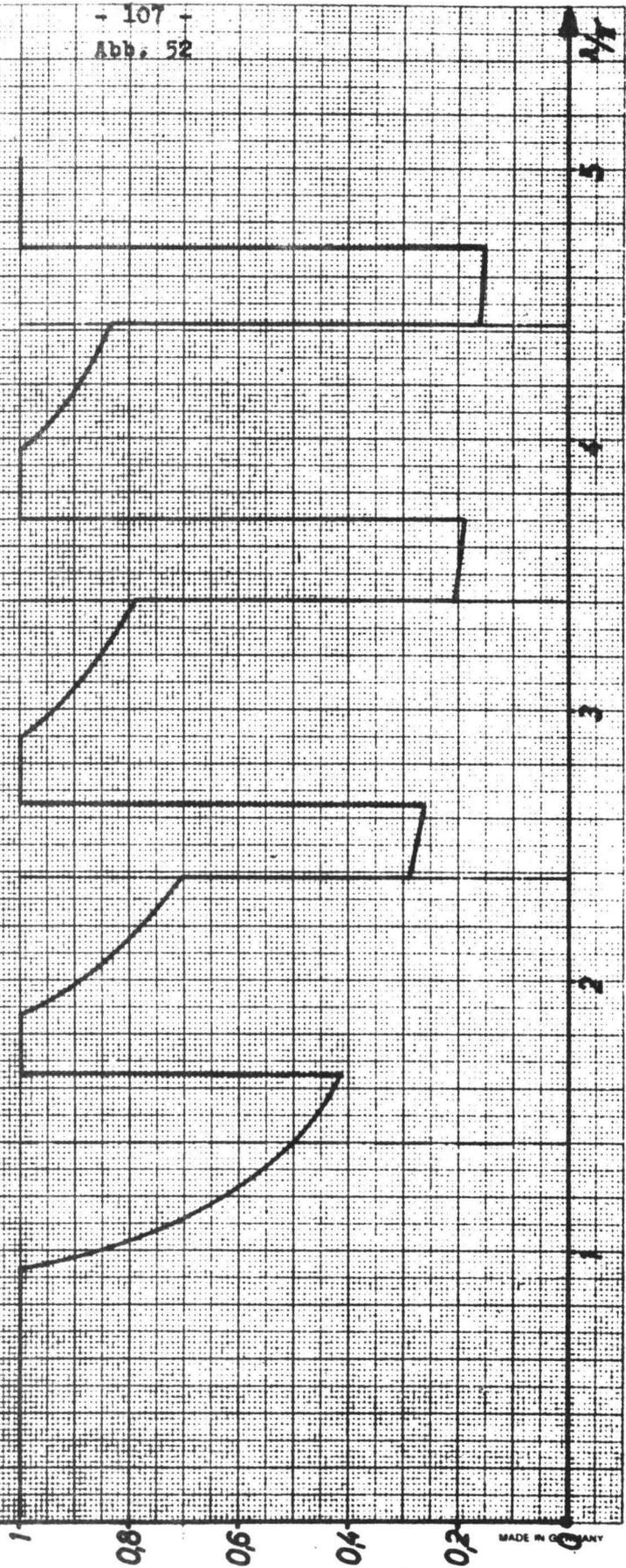
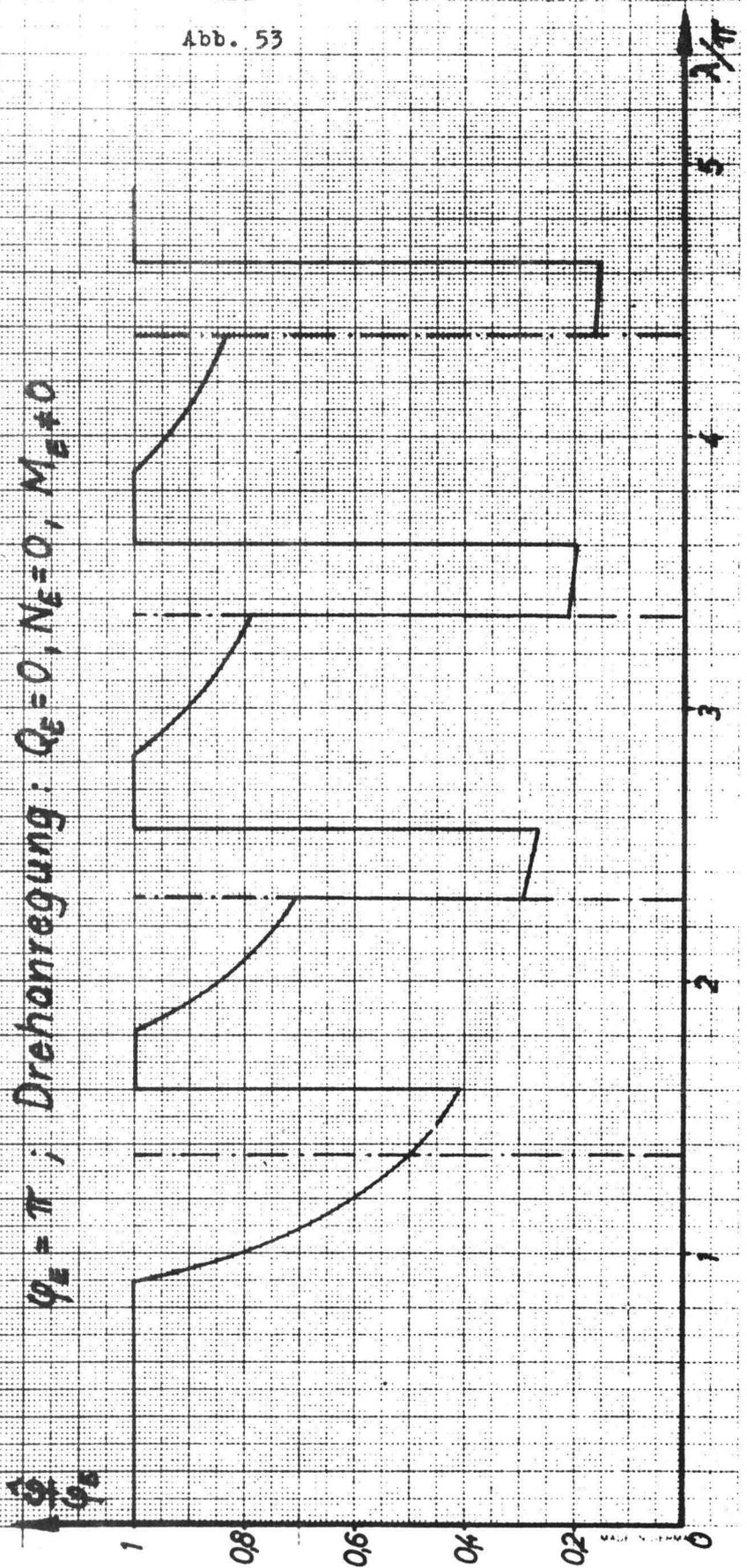


Abb. 53

Beidseitig freier Stab

$\varphi_E = \pi$; Drehanregung: $Q_E = 0, N_E = 0, M_E \neq 0$



Beidseitig freier Stab

$\varphi_E = 1,25\pi$; Drehanregung: $Q_E = 0, N_E = 0, M_E \neq 0$

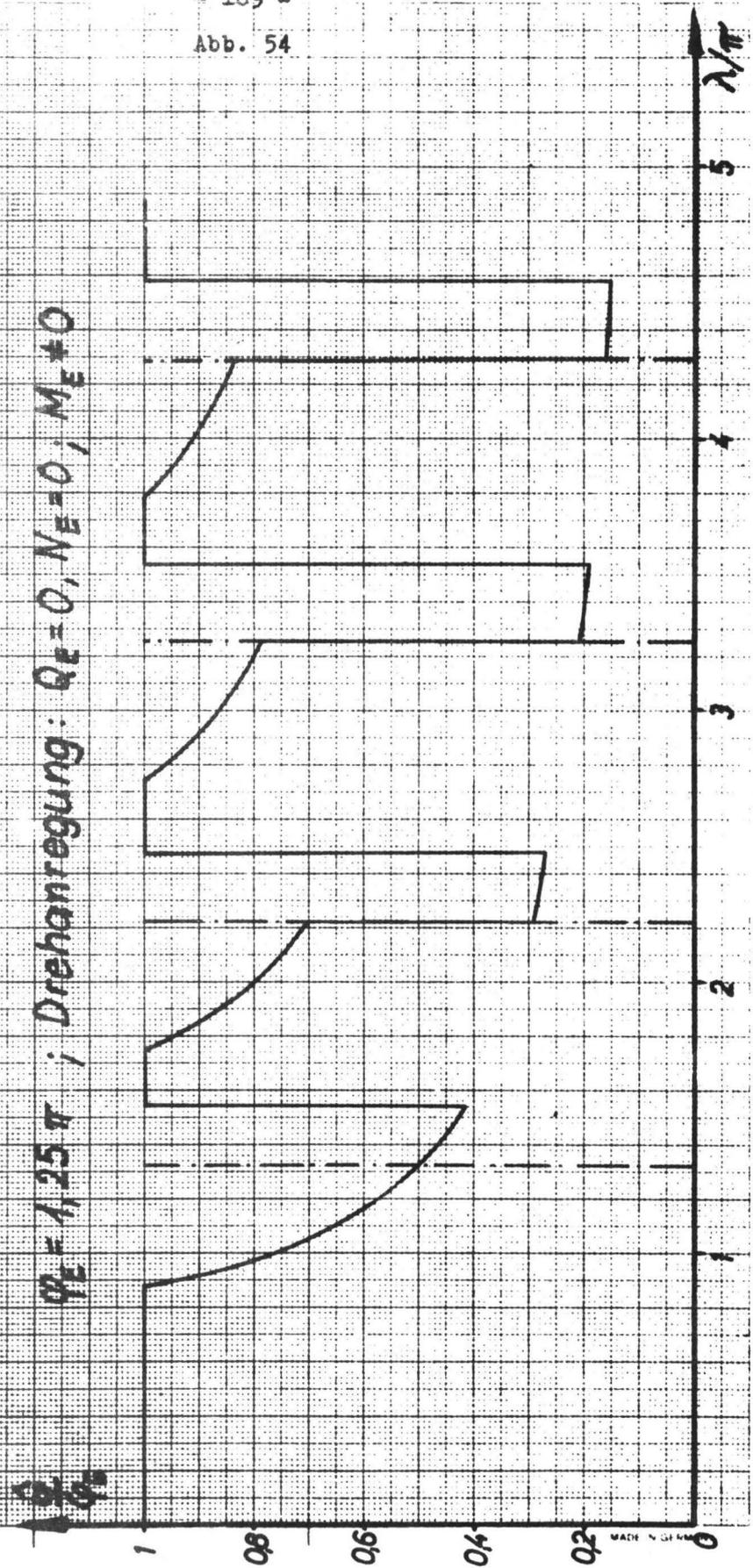
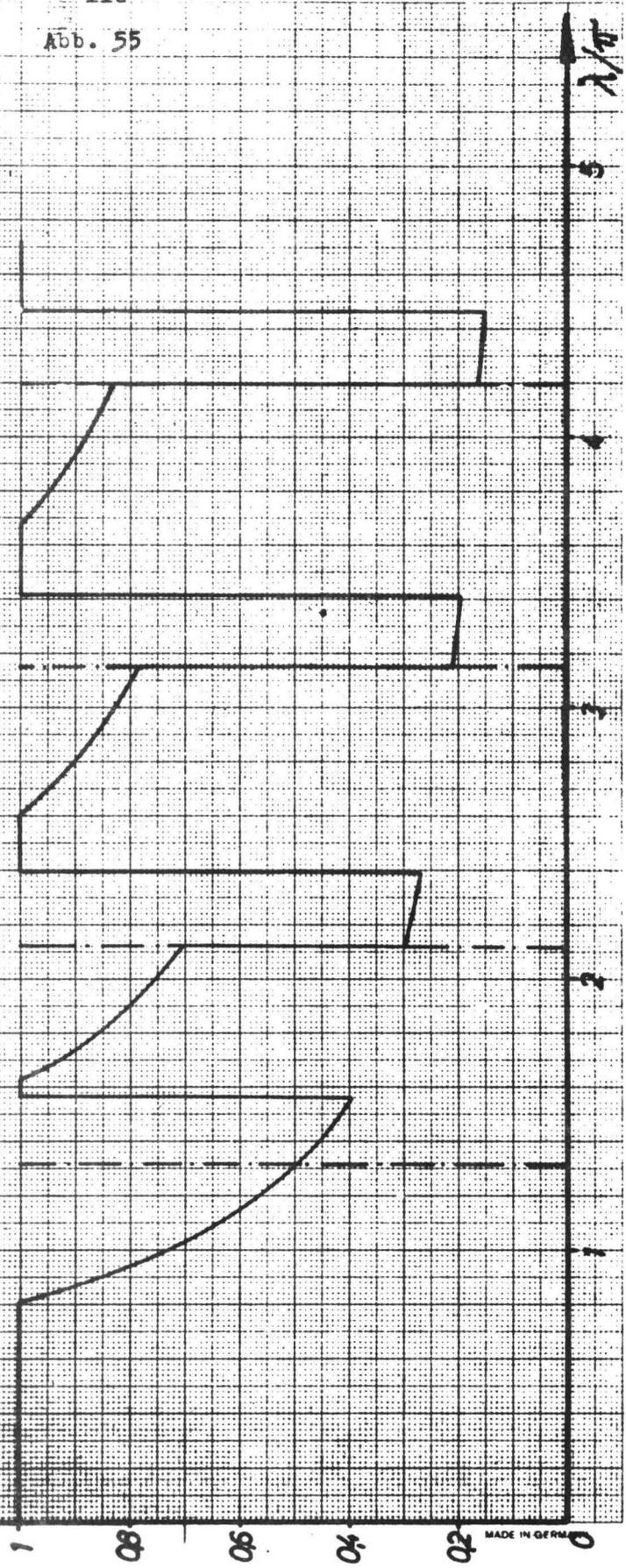


Abb. 55

Beidseitig freier Stab

$\varphi_E = 1.5\pi$; Drehanregung: $Q_E = 0, N_E = 0, M_E \neq 0$



Beidseitig freier Stab

$\varphi_E = 1,75\pi$; Drehanregung: $Q_E = 0, N_E = 0, M_E \neq 0$

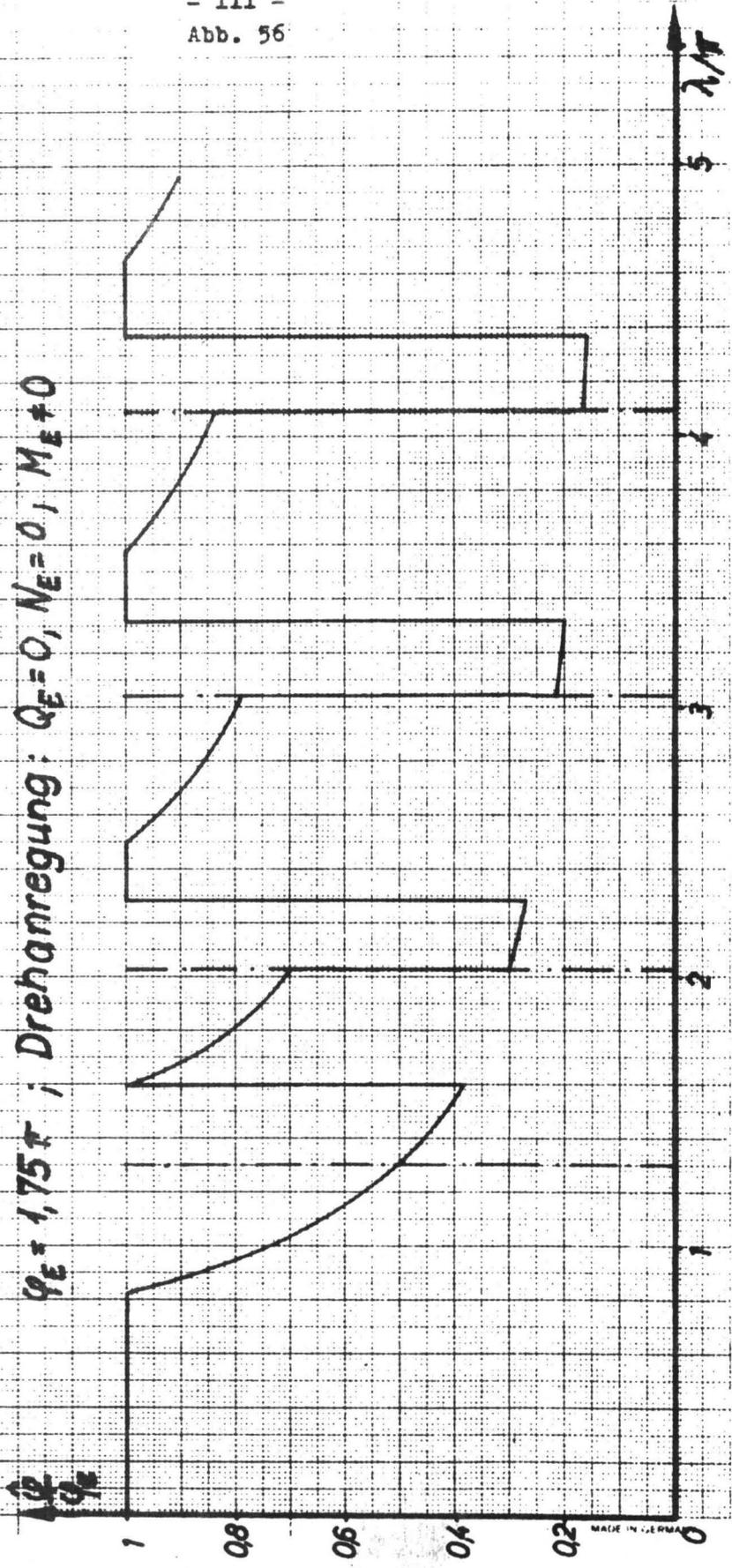


Abb. 57

Beidseitig freier Stab

$q_E = 2\pi$; Drehanregung: $Q_E = 0, N_E = 0, M_E \neq 0$

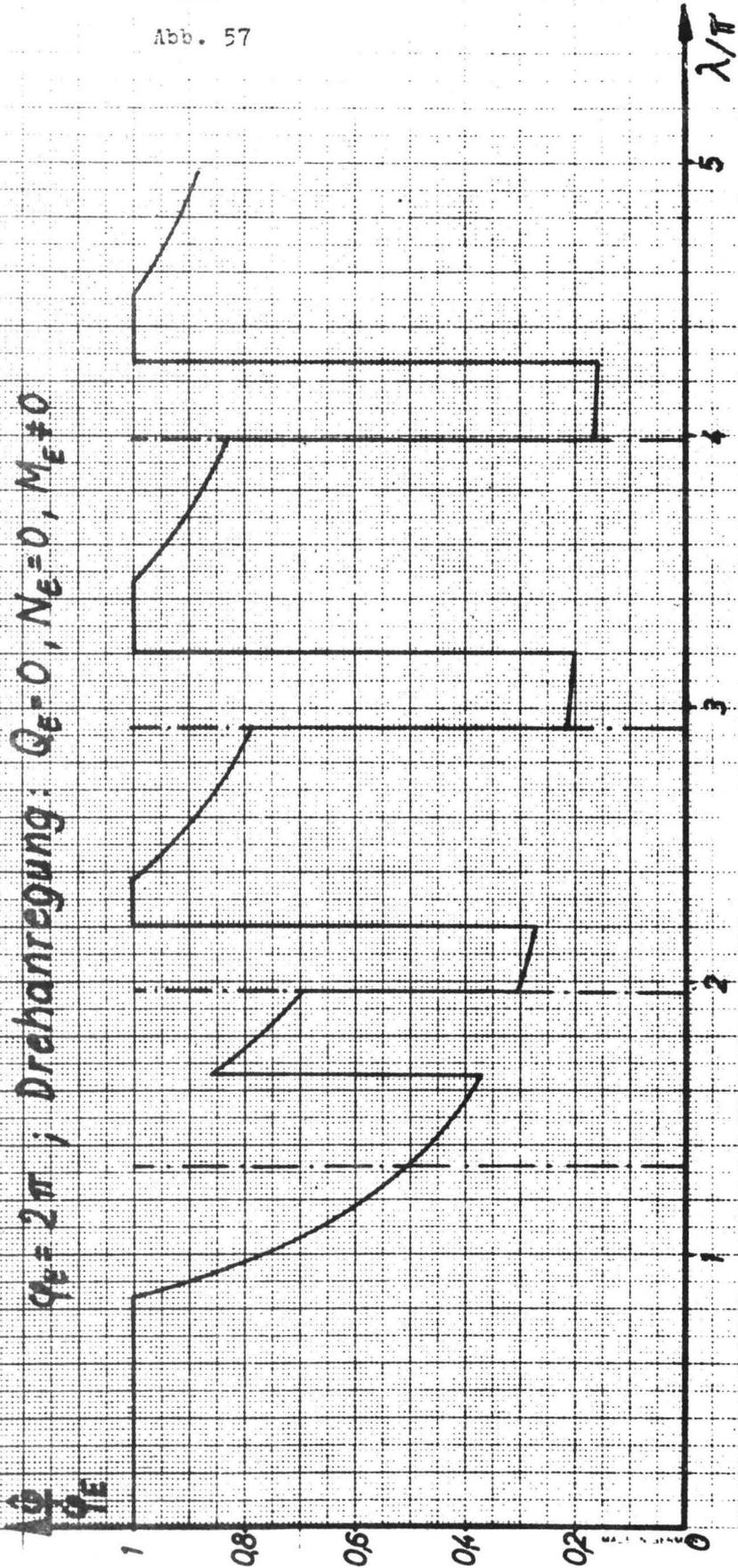


Abb. 58

Beidseitig freier Stab

$Q_E = \frac{q}{2}$; Queranregung: $M_E = 0, N_E = 0, Q_E \neq 0$

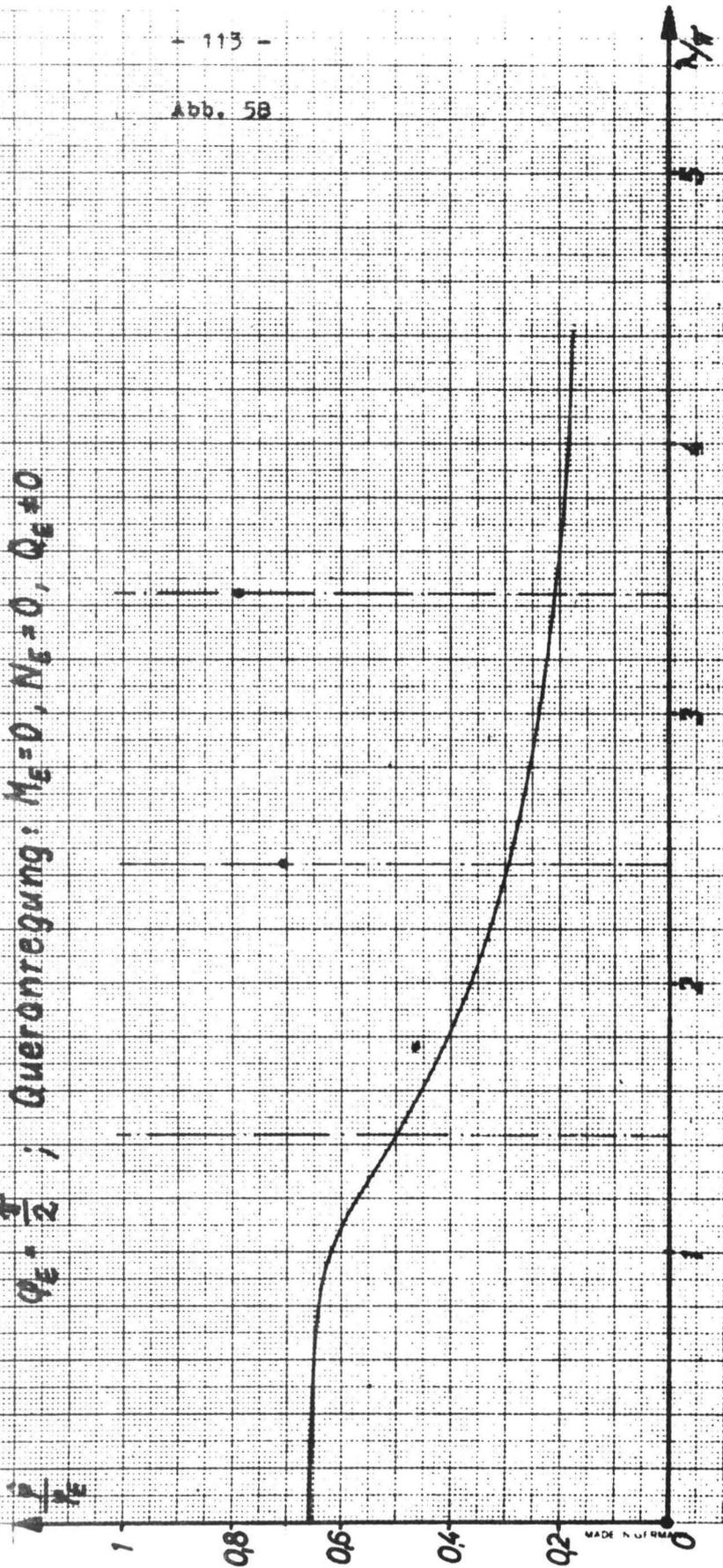


Abb. 59

Beidseitig freier Stab

$\varphi_E = 0,75\pi$; Queranregung: $M_E = 0, N_E = 0, Q_E \neq 0$

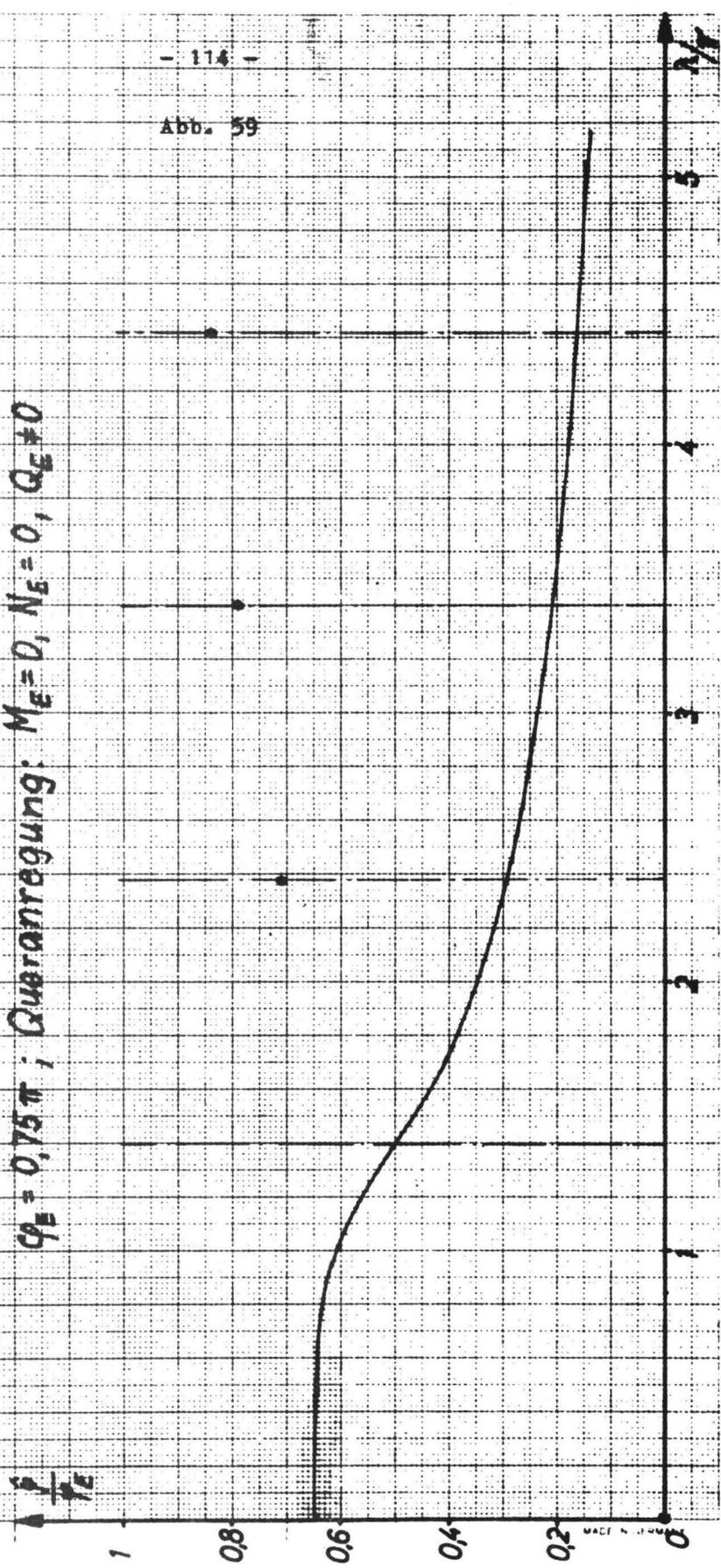
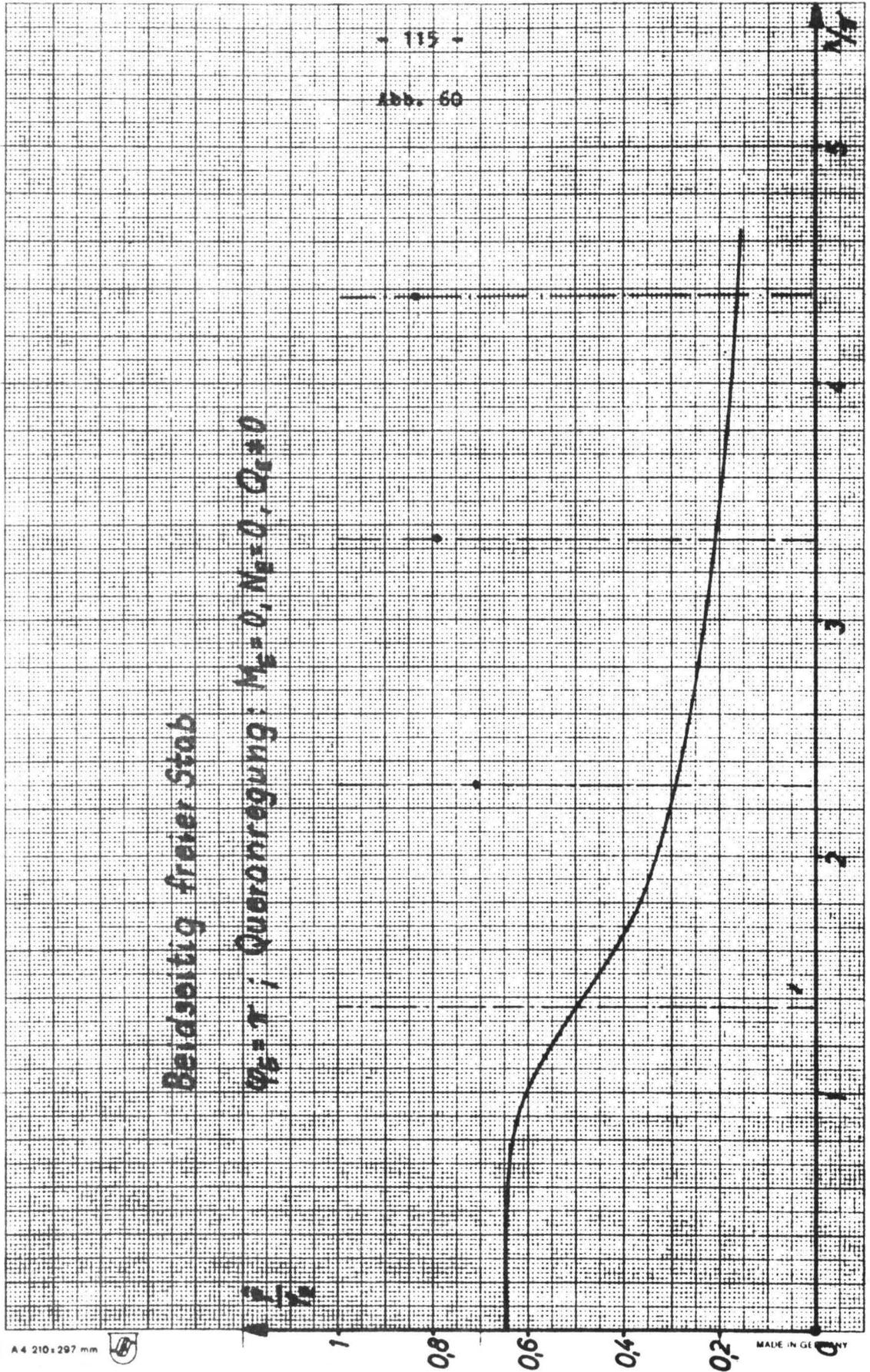


Abb. 60

Beidseitig freier Stab

$\varphi_0 = \tau$; Querschwingung: $M_E = 0, N_E = 0, Q_E = 0$

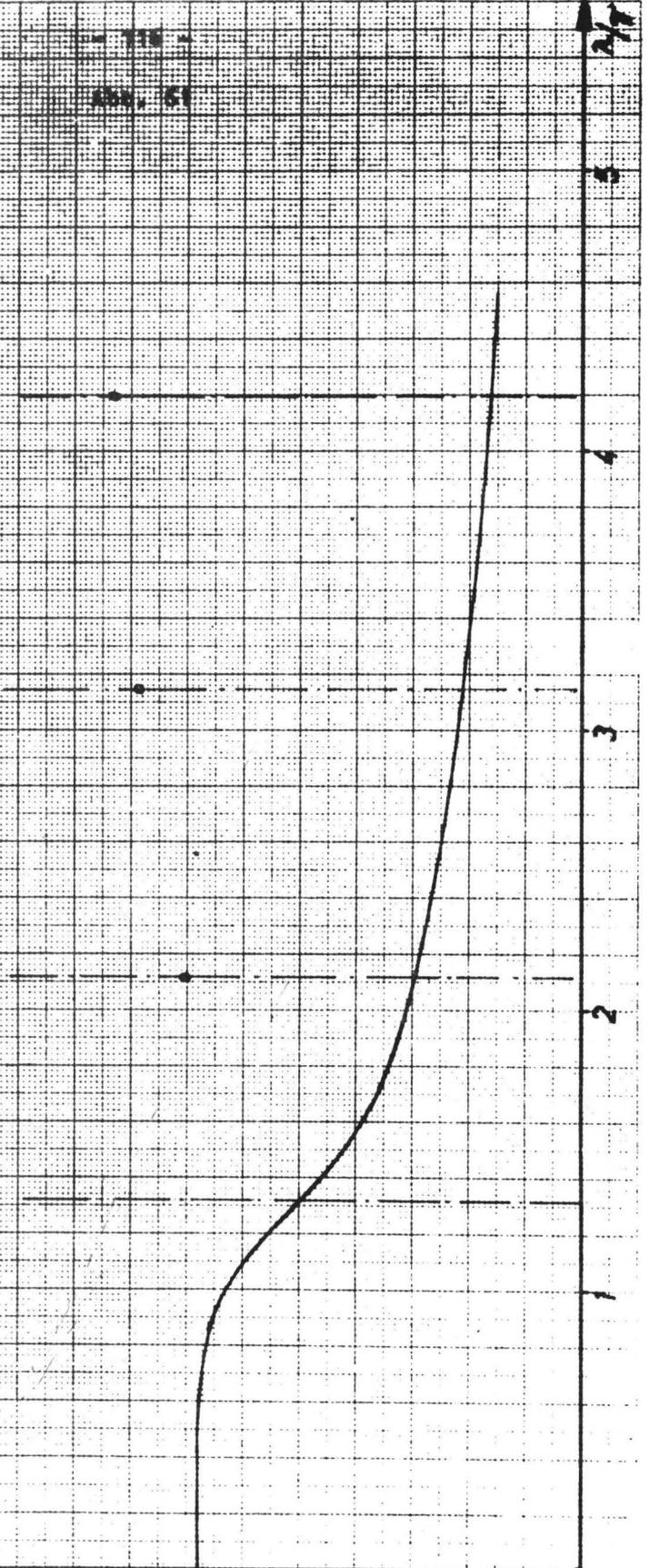


Beidseitig freier Stab

$\varphi_E = 1,5\pi$; Queranregung: $M_E = 0, N_E = 0, Q_E = 0$

$\frac{\rho}{\varphi_E}$

1
0,8
0,6
0,4
0,2
0



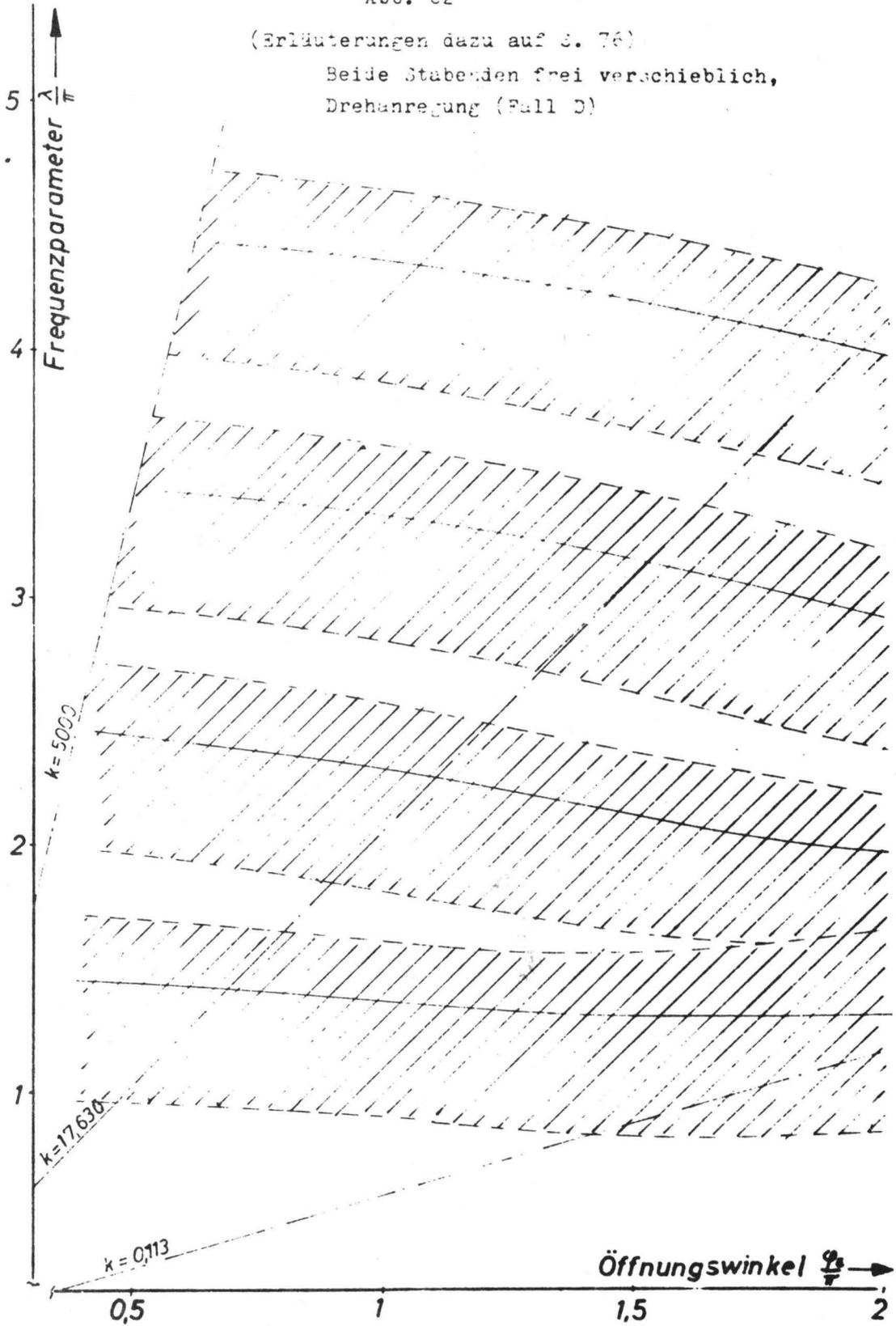
$\xi = 1,5\pi$
 $\xi = 4,5$

ξ/l

Abb. 62

(Erläuterungen dazu auf S. 76)

Beide Stäbchen frei verschieblich,
Drehanregung (Fall D)



"Bruchbereiche" als Funktion des Öffnungswinkels

Beidseitig freie Stäbe, Drehanregung (Fall D)
Anregungsfrequenzen unterhalb der 5. Eigenfrequenz

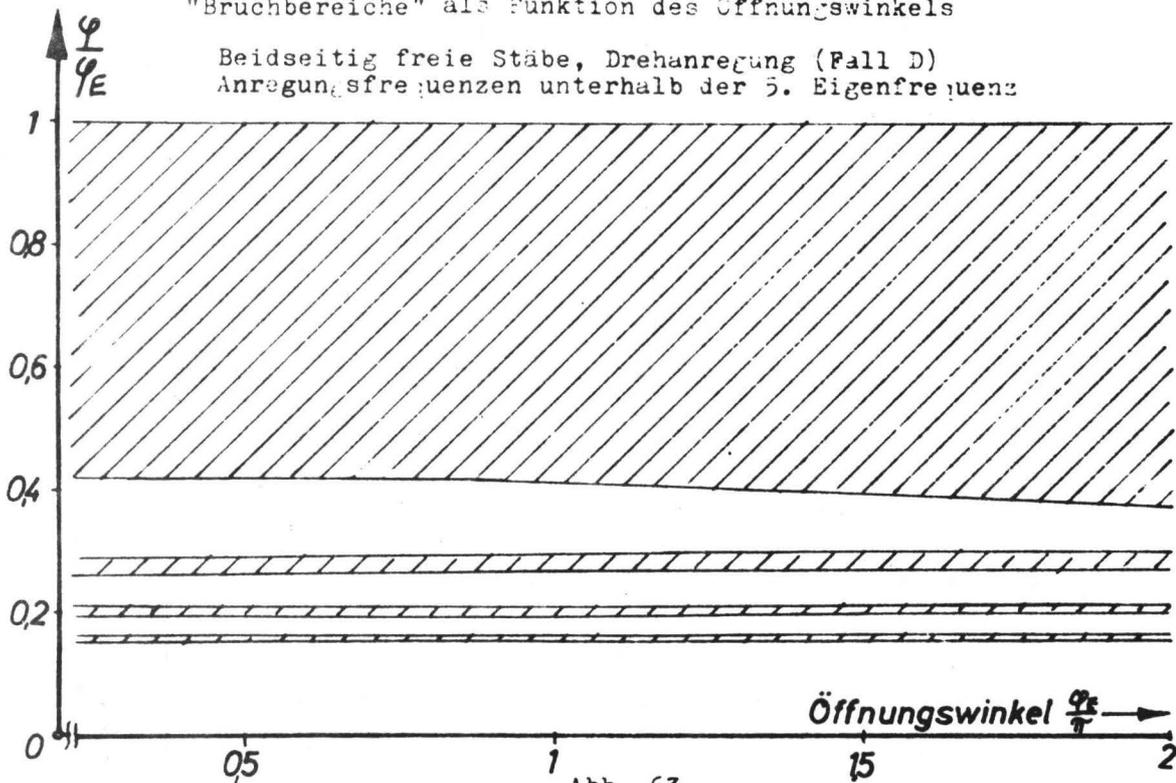


Abb. 63

Beidseitig freie Stäbe, Queranregung (Fall E)
Die einzelnen Linien kennzeichnen diskrete Bruchstellen,
die bei der 2., 3. bzw. 4. Eigenfrequenz möglich sind.

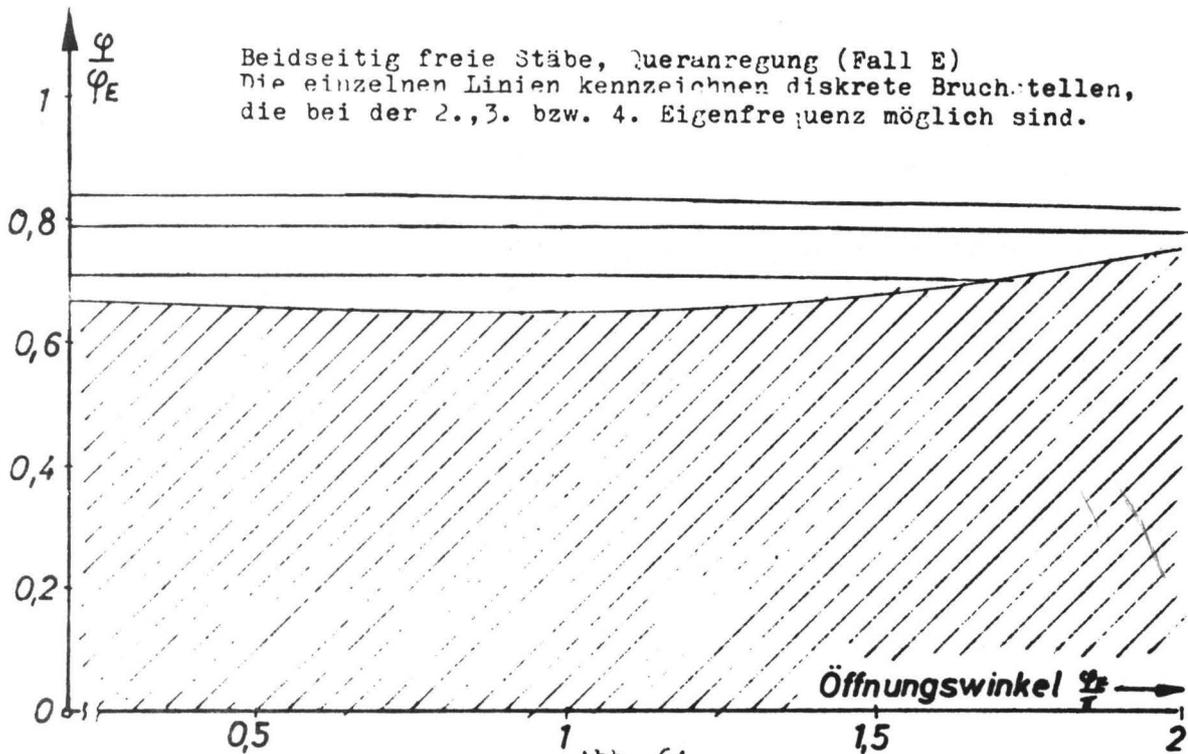


Abb. 64

4. Abgrenzung des Gültigkeitsbereich der einfachen Biegetheorie

Es ist bekannt, daß bei höheren Frequenzen, bei denen die Wellenlänge der Auslenkungsfunktion nicht mehr sehr groß gegenüber den Abmessungen des Stabquerschnitts ist, die Einflüsse von Achsdehnung, Schubverformung und Rotationsträgheit eine große Rolle spielen.

Diese werden in der Differentialgleichung (2.46), die den Untersuchungen in Abschnitt 3 zugrundeliegt, nicht erfaßt. Es soll nun überprüft werden, bis zu welchen Frequenzen die Vernachlässigung dieser Einflüsse berechtigt ist, d.h. bis zu welchen Frequenzen die Ergebnisse des Abschnitts 3 gültig sind. Dazu greifen wir auf die genauere Differentialgleichung (2.25) für die Schwingungsform zurück.

4.1 Wurzeln der charakteristischen Gleichung

Bei Berücksichtigung der obengenannten Nebeneinflüsse wird die Schwingungsform ebenso wie in der einfachen Biegetheorie durch eine lineare Differentialgleichung 6. Ordnung mit konstanten Koeffizienten beschrieben.

Der Exponentialansatz

$$v(\varphi) = C e^{p\varphi}$$

für die Lösungsfunktion führt auf die charakteristische Gleichung

$$p^6 + C_2 p^4 + C_1 p^2 + C_0 = 0, \quad (4.1)$$

die ebenso wie Gleichung (2.56) kubisch in p^2 ist. Die Koeffizienten C_0, C_1 und C_2 (siehe Gleichungen 2.26) und damit die Wurzeln der charakteristischen Gleichung hängen jetzt jedoch von drei Parametern, nämlich κ, f und γ ab (siehe Gleichungen (2.18) bis (2.20)).

Der Charakter der Wurzeln von Gleichung (4.1) wird im wesentlichen vom Frequenzparameter $\kappa = k/f$ bestimmt; die Einflüsse des Schlankheitsparameters f und des Schubparameters γ machen sich erst bei höheren Werten von κ bemerkbar.

Im übrigen variiert der Schubparameter

$$\gamma = 2(1+\nu) \lambda_s$$

nicht sehr stark; denn die Querkontraktionszahl ν kann nur innerhalb der Grenzen $0 \leq \nu \leq 0,5$ liegen und der Formfaktor λ_s des Querschnitts schwankt normalerweise nur im Verhältnis 1 : 2.

Die charakteristische Gleichung (4.1) der verbesserten Theorie geht für $f \rightarrow \infty$ in die einfache Gleichung (2.56) über. Hat der Schlankheitsparameter jedoch eine endliche Größe, dann treten zu den 3 Lösungsbereichen der einfachen Gleichung zwei neue hinzu. Die Typen der Wurzeln der verbesserten charakteristischen Gleichung und die zugehörigen reellen Lösungsfunktionen der Differentialgleichung (2.25) sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Bereich	Wurzeln der char. Gl.			Lösungsfunktionen der Diff'-Gl.		
	$p_{1,2}$	$p_{3,4}$	$p_{5,6}$	v_1	v_2	v_3
I	imag.	imag.	imag.	$\sin n_1(\varphi + \alpha'_1)$	$\sin n_2(\varphi + \alpha'_2)$	$\sin n_3(\varphi + \alpha'_3)$
II	"	konj. komplex	konj. komplex	"	$e^{\alpha(\varphi + \alpha'_2)} \sin \beta(\varphi + \alpha'_2)$	$e^{-\alpha(\varphi + \alpha'_3)} \sin \beta(\varphi + \alpha'_3)$
III	"	reell	reell	"	$e^{\pm n_2 \varphi}$	$e^{\pm n_2 \varphi}$
IV	"	reell	imag.	"	$e^{\pm n_2 \varphi}$	$\sin n_3(\varphi + \alpha'_3)$
V	"	imag.	imag.	"	$\sin n_2(\varphi + \alpha'_2)$	$\sin n_3(\varphi + \alpha'_3)$

Die unteren Grenzen der Lösungsbereiche II und III bleiben im wesentlichen unverändert, d.h. sie liegen unabhängig von der Größe von f ungefähr bei

$$\kappa_1 \approx 0,113 f$$

und

$$\kappa_2 \approx 17,636 f$$

Die unsere Grenze von Bereich IV ist durch

$$\kappa_3 = 1, \text{ d.h. } k = f \quad (4.2)$$

gegeben, die von Bereich V durch

$$\kappa_4 = \frac{f+1}{\gamma} \quad (4.3)$$

In Abb. 65 ist zur Veranschaulichung der Verlauf der Wellenzahlen n_1, n_2 und n_3 bzw. α und β der Lösungsfunktionen in Abhängigkeit von κ aufgetragen worden. Für dieses Beispiel wurden die Parameterwerte $f = 1000$ und $\gamma = 3$ gewählt. Diese Werte entsprechen z.B. einem Stahlstab mit Rechteckquerschnitt, dessen radiale Dicke rund $1/10$ des Krümmungsradius beträgt. Die Berechnung der entsprechenden Kurven für andere Werte von f und γ zeigt, daß der Einfluß dieser Parameter auf die Größe der Wellenzahlen in den Frequenzbereichen I, II und im unteren Teil von III gering ist, sofern der Schlankheitsparameter eine gewisse Mindestgröße hat. Diese liegt etwa bei $f = 300$.

Wenn man die Wellenzahlen über dem Parameter k aufträgt, dann bleiben bei größer werdendem Schlankheitsparameter f die Frequenzbereiche I und II annähernd gleich, während Bereich III immer mehr gedehnt wird.

Als Richtwert kann man angeben, daß die einfache Theorie die Wellenzahlen der Lösungsfunktionen ungefähr bis zum Frequenzparameter

$$\kappa = 0,1, \quad \text{d.h.} \quad k = 0,1 f \quad (4.4)$$

genügend genau wiedergibt, wenn man ca. 5% Fehler zuläßt.

4.2 Berechnung der Beanspruchung

Es ist jedoch noch zu prüfen, wie stark sich die Nebeneinflüsse auf die Verteilung der Beanspruchung längs der Stabachse auswirken. Denn an die Stelle der einfachen Beziehungen (2.50) bis (2.52) für die Schnittlasten treten jetzt die Gleichungen (2.38), (2.39) und (2.41). Außerdem ist jetzt für die Beanspruchung nicht mehr allein das Biegemoment M maßgebend. Zu der Normalspannung σ_M auf Grund der Biegung tritt noch die Normalspannung σ_N hinzu, die durch die Längskraft N hervorgerufen wird. Beachtet man die in Abb. 2 festgelegte Vorzeichenregelung, dann herrscht in der unteren Faser des Stabquerschnitts die Spannung

$$\sigma_u = \sigma_N + \sigma_M \quad (4.5)$$

Wellenzahlen der Lösungsfunktionen nach der verbesserten Theorie

- Parameter: $f=1000, \gamma=3$
- - - Grenzfall $f \rightarrow \infty$

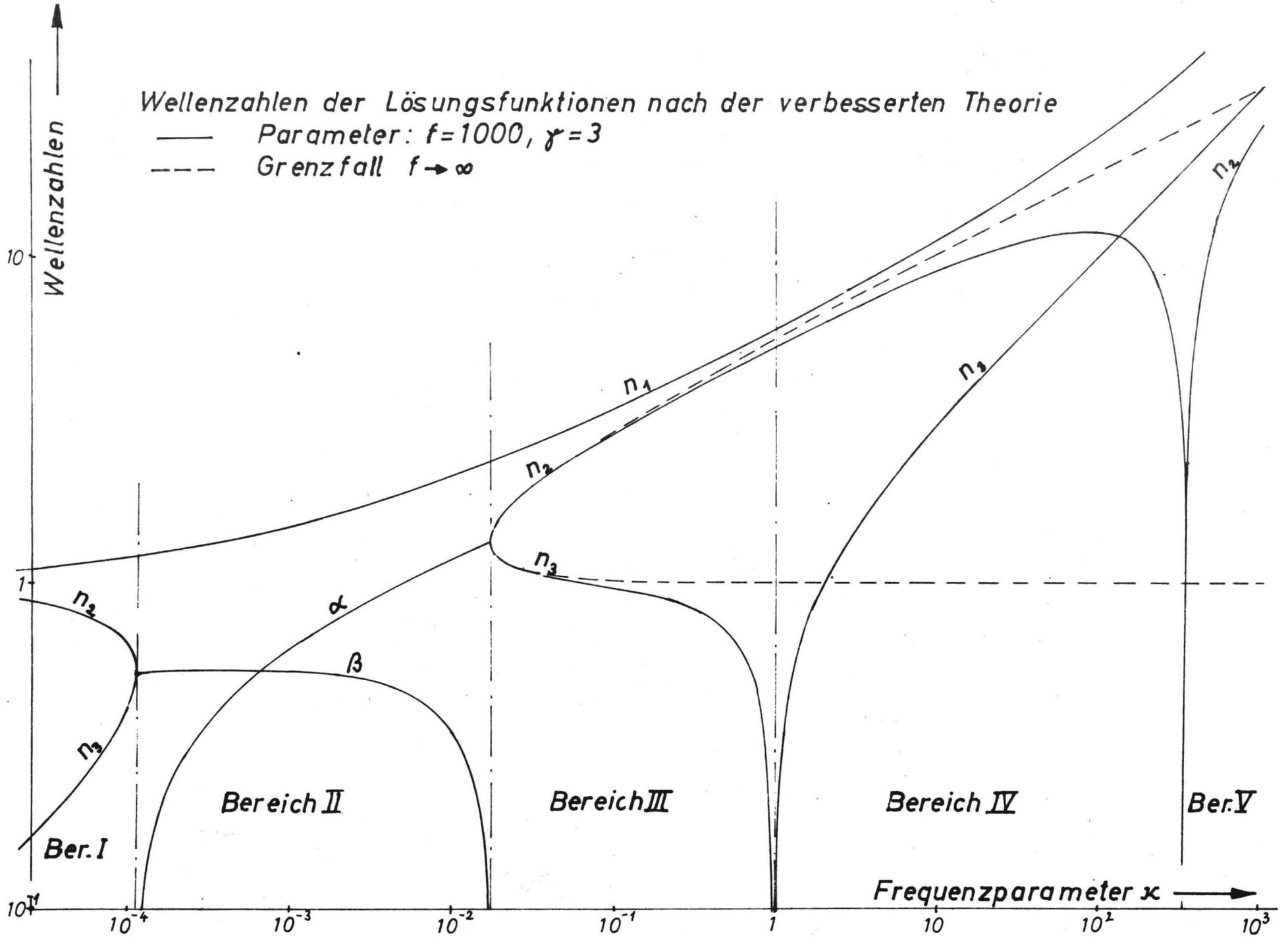


Abb. 65

und in der oberen die Spannung

$$\sigma_o = \sigma_N - \sigma_M \quad (4.6)$$

(siehe Abb.66).

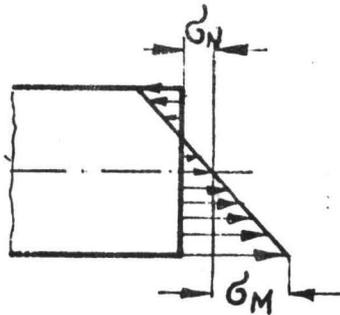


Abb. 66

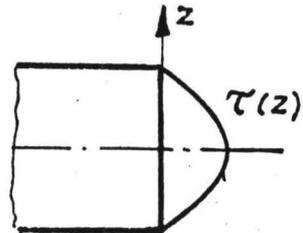


Abb.67

Die zusätzliche Beanspruchung durch die Schubspannung infolge der Querkraft braucht nicht berücksichtigt zu werden, weil diese ja am oberen und unteren Querschnittsrand verschwindet (siehe Abb.67). In dem von uns betrachteten Frequenzbereich wird der Stab hauptsächlich auf Biegung beansprucht, und die größte Spannung tritt in einer der Randfasern auf.

Nach den Gleichungen (2.38) und (2.39) gilt

$$N = \frac{EF}{a} \frac{1}{(1-\chi)K_o^*} (v'' + K_3 v''' + K_4 v')$$

und

$$M = \frac{EI}{a^2} \frac{1}{K_o^*} (-(\gamma+1)v'' + K_2 v''' + K_0 v')$$

Führen wir die Abkürzungen

$$\bar{N} = \frac{a}{EF} N \quad (4.7)$$

und

$$\bar{M} = \frac{a^2}{EI} M \quad (4.8)$$

ein, dann erhalten wir mit

$$\sigma_N = \frac{N}{F} = \frac{E}{a} \bar{N}$$

und

$$\sigma_M = \frac{M}{I} e = \frac{E}{a^2} e \bar{M}$$

für die Normalspannung in der unteren bzw. oberen Randfaser

$$\left. \begin{aligned} \sigma_u &= \sigma_N + \sigma_M = \frac{E}{a} \left(\bar{N} + \frac{e}{a} \bar{M} \right) \\ \sigma_o &= \sigma_N - \sigma_M = \frac{E}{a} \left(\bar{N} - \frac{e}{a} \bar{M} \right) \end{aligned} \right\} (4.9)$$

bzw.

Das in dieser Formel auftretende Verhältnis e/a kann man in die Form

$$\frac{e}{a} = \frac{i}{a} \frac{e}{i} = \sqrt{\frac{1}{f}} \cdot \frac{e}{i} \quad (4.10)$$

umschreiben. Bei der Berechnung der maximalen Beanspruchung spielen also zwei von der Querschnittsform des Stabes abhängige Größen eine Rolle, nämlich λ_s und e/i , das Verhältnis des Abstandes zwischen Randfaser und Querschnittsschwerpunkt zum Trägheitsradius.

Für einen vollen Rechteckquerschnitt ist z.B.

$$\frac{e}{i} = \sqrt{3} \quad \text{und damit} \quad \frac{e}{a} = \sqrt{\frac{3}{f}}. \quad (4.11)$$

Daraus folgt für die Randspannungen

$$\left. \begin{aligned} \sigma_u &= \frac{E}{a} \left(\bar{N} + \sqrt{\frac{3}{f}} \bar{M} \right) \\ \text{und} \quad \sigma_o &= \frac{E}{a} \left(\bar{N} - \sqrt{\frac{3}{f}} \bar{M} \right) \end{aligned} \right\} (4.12)$$

4.3 Diskussion der berechneten Beispiele

Um zu prüfen, ob die Nebeneinflüsse gegenüber der reinen Biegung eine wesentliche Verlagerung der Bruchstellen herbeiführen, wurde eine Reihe von Beispielen nach der verbesserten Theorie durchgerechnet.

Es handelte sich dabei wie in Abschnitt 3.9.1 um einseitig fest eingespannte Stäbe, die durch eine vorgegebene harmonische Bewegung der Einspannung zu Schwingungen angeregt werden.

Für die Aufteilung der Randbedingungen wurden die Gleichungen (2.30), (2.34), (2.38), (2.39) und (2.41) herangezogen, als feste Parameter wurden $\gamma = 3$ und $f = 1000$ bzw. $f = 5000$ gewählt.

Zur Berechnung der Beanspruchungen wurden die Gleichungen (4.12) zugrundegelegt, d.h., es wurde ein Rechteckquerschnitt angenommen.

Für dieselben Anregungstypen, wie sie in den Diagrammen 22 bis 44 dargestellt sind, wurden der Verlauf der Randspannungen σ_u und σ_o längs der Stabachse berechnet und hieraus jeweils die Stelle $\hat{\varphi}$ der höchsten Beanspruchung ermittelt.

Da die Ergebnisse für Frequenzen aus den Bereichen I und II weitgehend mit denen der einfachen Theorie übereinstimmen,

genügte es, die Vergleichsrechnungen für Frequenzen aus dem unteren Teil von Bereich III durchzuführen. Um den Vergleich mit der elementaren Theorie einfach durchführen zu können, wurde für die graphische Darstellung

$$\frac{\lambda}{\pi} = \sqrt[4]{\alpha f} \cdot \frac{\varphi_E}{\pi}$$

als Frequenzparameter benutzt.

Einige der ermittelten Kurven $\hat{\varphi} = f\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)$ sind in den Abbildungen 68 bis 73 dargestellt. In diesen stellen die durchgezogenen Linien die Ergebnisse der verbesserten Theorie dar, und zum Vergleich sind die Kurven nach der einfachen Theorie gestrichelt eingezeichnet.

Außerdem sind in den Diagrammen 74 bis 76 - entsprechend den Diagrammen 45 bis 47 - die Grenzen derjenigen Frequenzbereiche, in denen die Bruchstelle nicht mit der Einspannstelle zusammenfällt, über dem Öffnungswinkel des Stabes aufgetragen worden.

Der Vergleich zwischen den Ergebnissen der einfachen und der verbesserten Theorie zeigt folgendes:

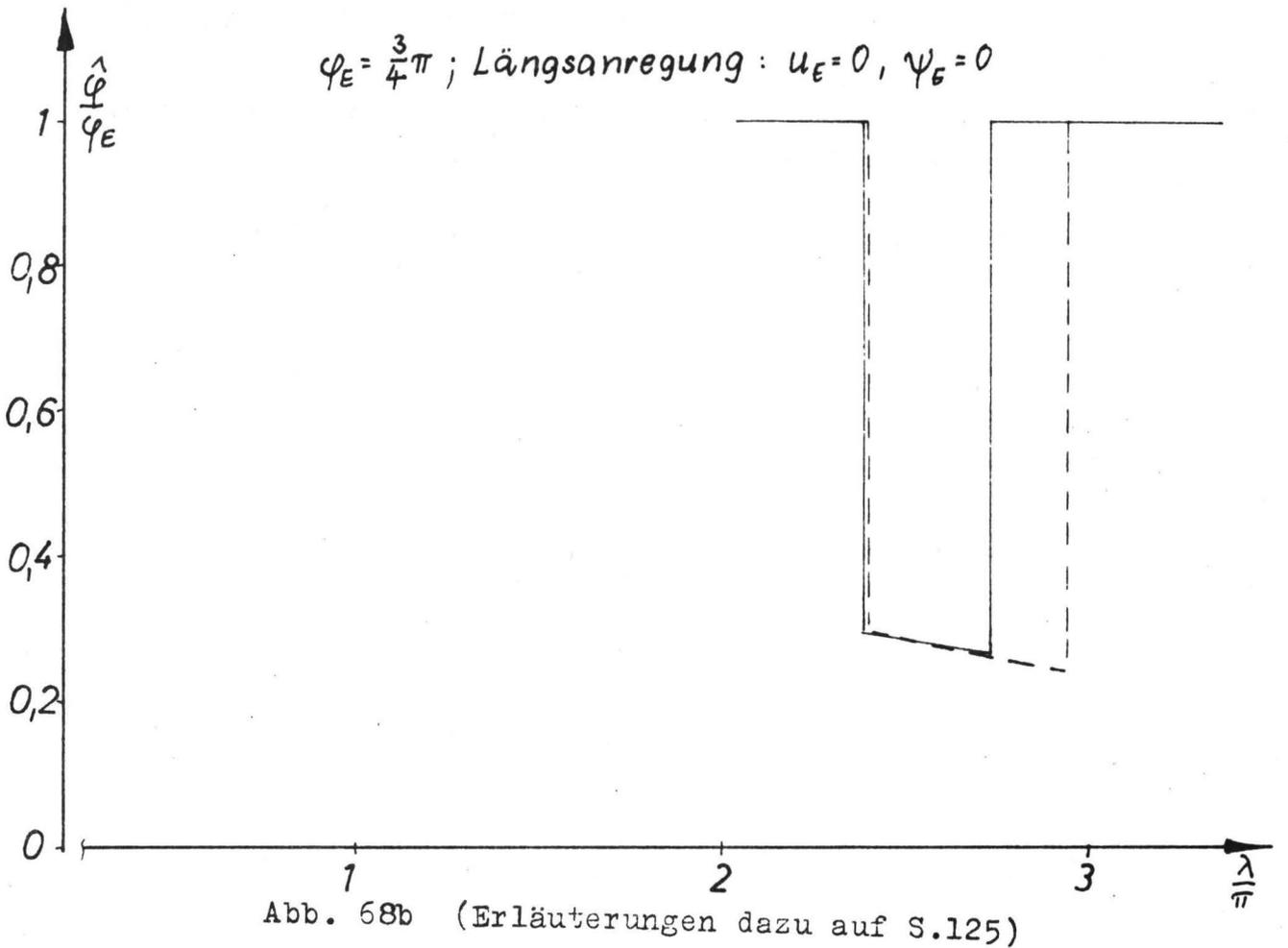
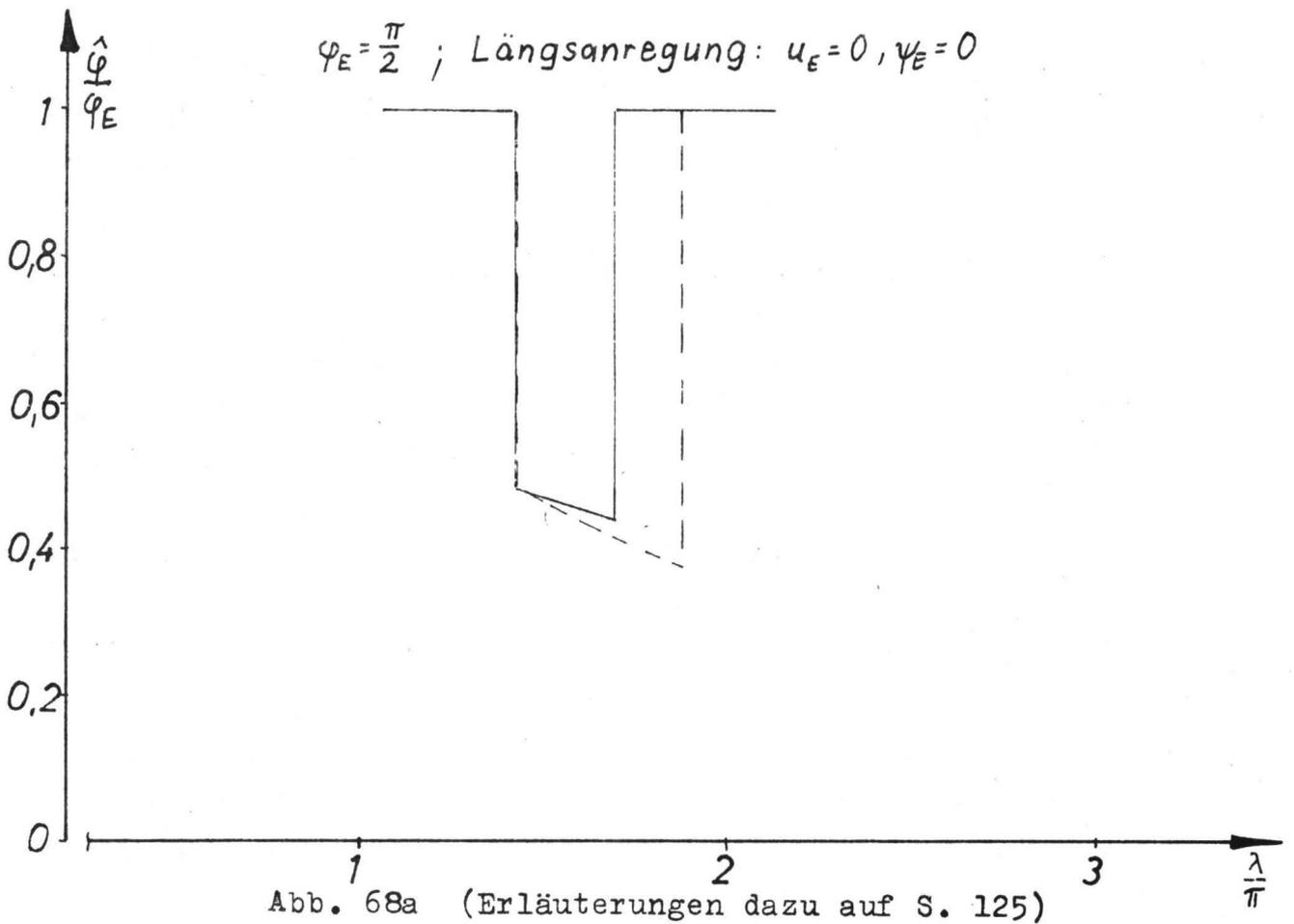
- 1.) Die Eigenfrequenzen werden gegenüber dem Fall der reinen Biegung erniedrigt, und zwar ist die relative Verringerung um so größer, je größer der Frequenzparameter k ist.
- 2.) Die Abhängigkeit der Stelle der größten Beanspruchung von der Frequenz bleibt im wesentlichen unverändert. Bei Anregung in einer Eigenfrequenz oder in deren unmittelbarer Nähe wird der Bruch immer an der Einspannstelle auftreten. (Die Ausnahmen von dieser Regel kommen im Frequenzbereich I vor und werden durch die Nebeneinflüsse nicht verändert.)
Zwischen den Eigenfrequenzen liegen jeweils Frequenzbereiche, in denen die größte Beanspruchung nicht an der Einspannstelle auftritt.
- 3.) Entsprechend der Erniedrigung der Eigenfrequenzen sind diese Frequenzbereiche gegenüber der bisherigen Lage nach unten verschoben, außerdem sind sie schmaler.

- 4.) Bei Queranregung und bei Drehanregung werden die Kurven, die $\hat{\varphi}$ als Funktion des Frequenzparameters darstellen, durch die Nebeneinflüsse nur in geringem Maße quantitativ verändert.
- 5.) Bei Längsanregung hingegen weisen die Kurven $\hat{\varphi} = f\left(\frac{\lambda}{l}\right)$ gegenüber denen der einfachen Theorie qualitative Abweichungen auf, wenn im vorliegenden Beispiel* der Frequenzparameter k ungefähr den Wert $k = 100$ übersteigt. Die Stelle der relativen Beanspruchungsextrema sind zwar nur unwesentlich verschoben, aber da sich die Größenverhältnisse zwischen den einzelnen Extremwerten verändern, verlagert sich hier die größte Beanspruchung mitunter an ganz andere Stellen als bisher.

Es ist physikalisch auch einleuchtend, daß sich bei Längsanregung die stärksten Abweichungen von der reinen Biegung einstellen; denn die Anregung in Richtung der Stabachse ruft stärkere Normalkräfte hervor als eine Querkraft oder ein Moment.

Die Vergleichsrechnungen bestätigen, daß die einfache Biegetheorie auch hinsichtlich der Beanspruchungsform zutreffende Ergebnisse liefert, wenn der Frequenzparameter unterhalb der Richtgrenze (4.4) liegt.

*Schlankheitsparameter $f = 1000$



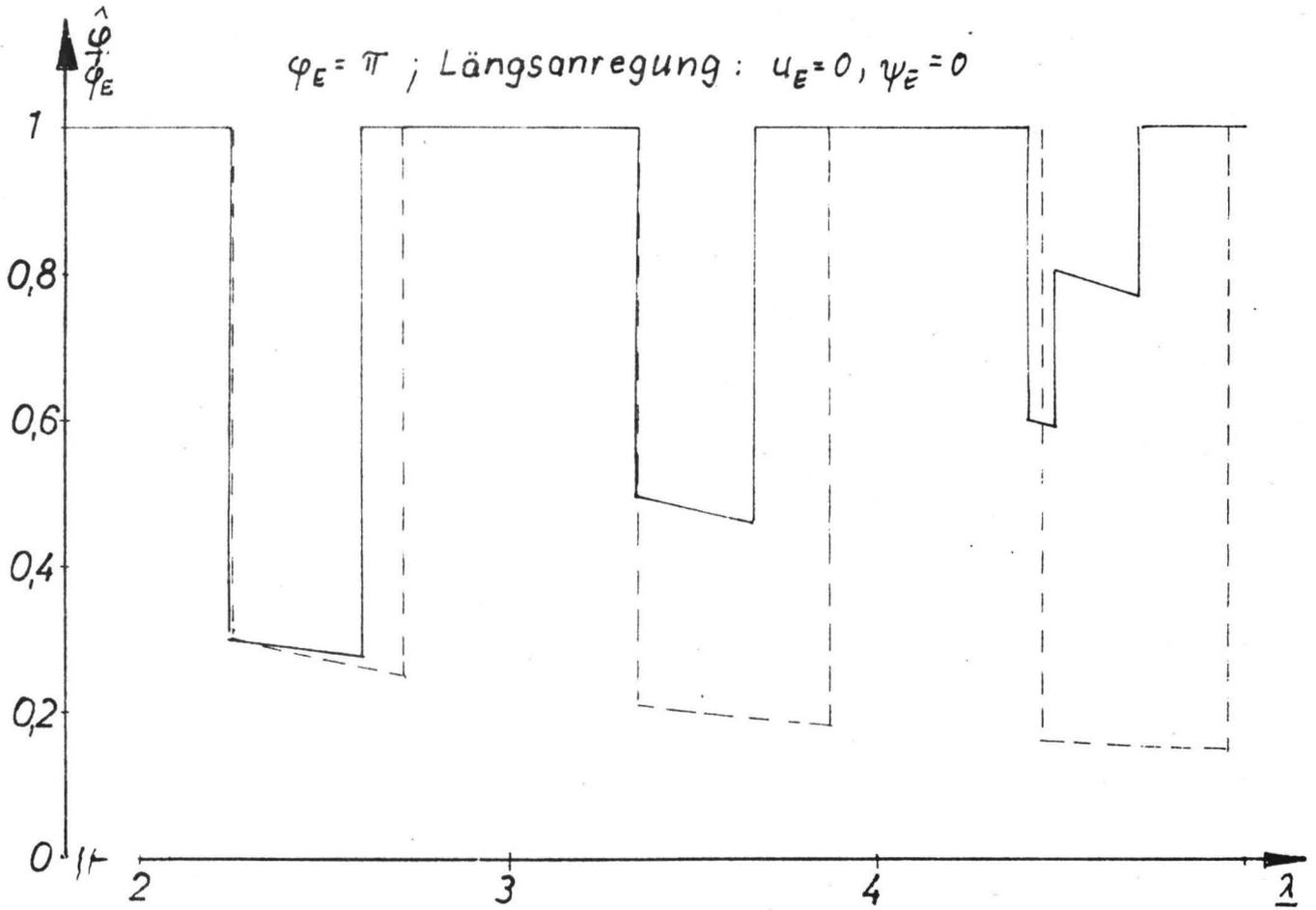


Abb. 69a (Erläuterungen dazu auf S. 125)

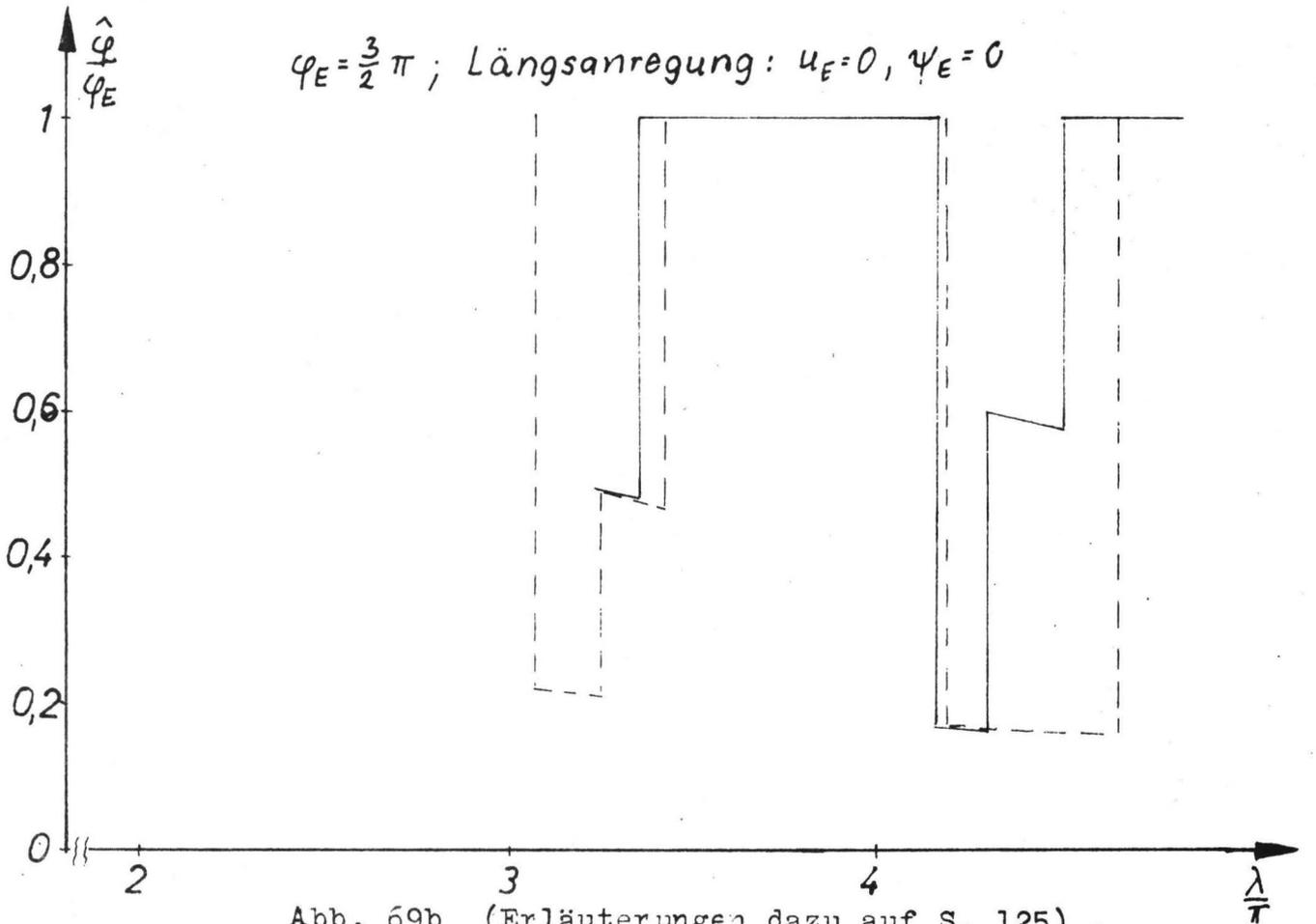


Abb. 69b (Erläuterungen dazu auf S. 125)

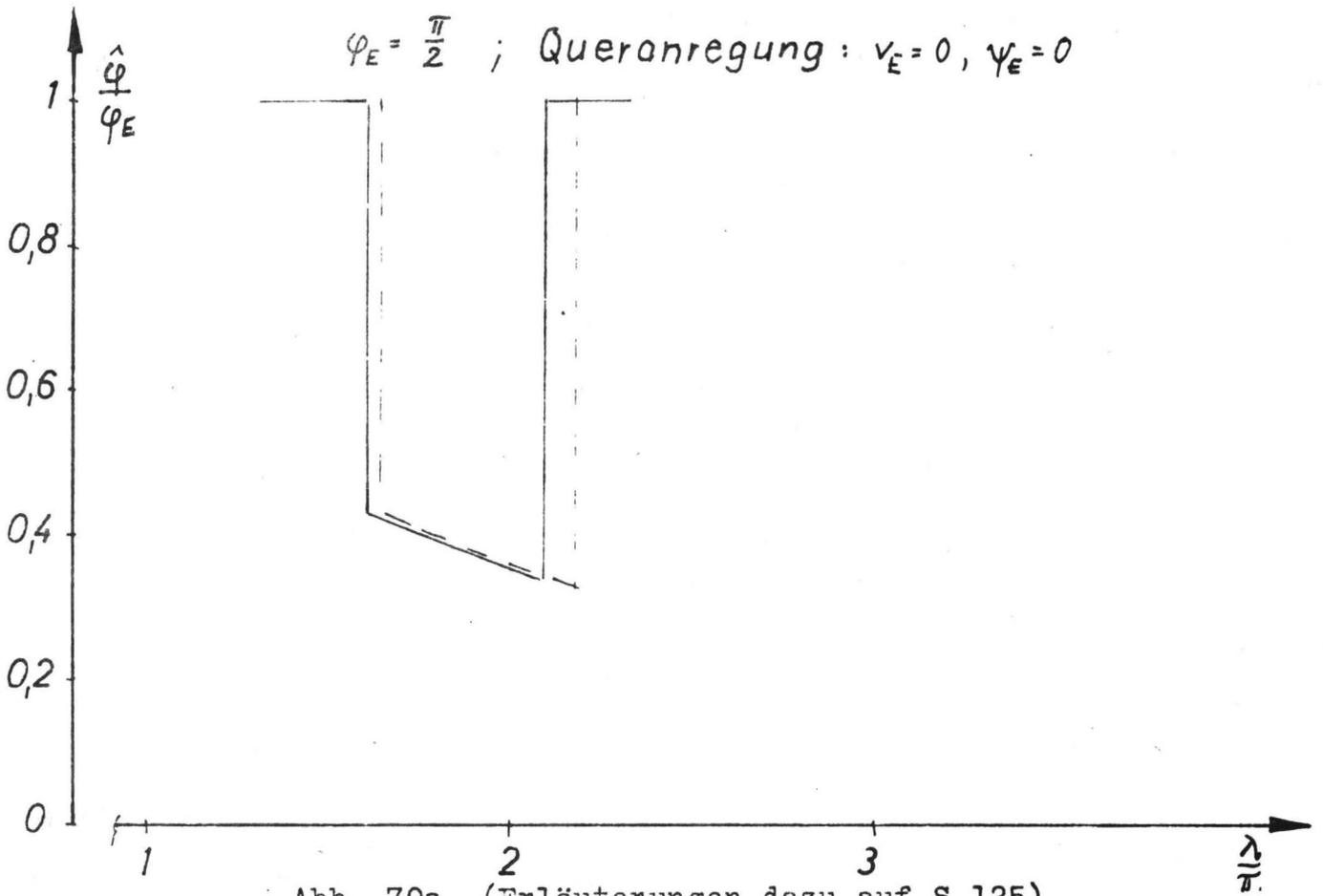


Abb. 70a (Erläuterungen dazu auf S.125)

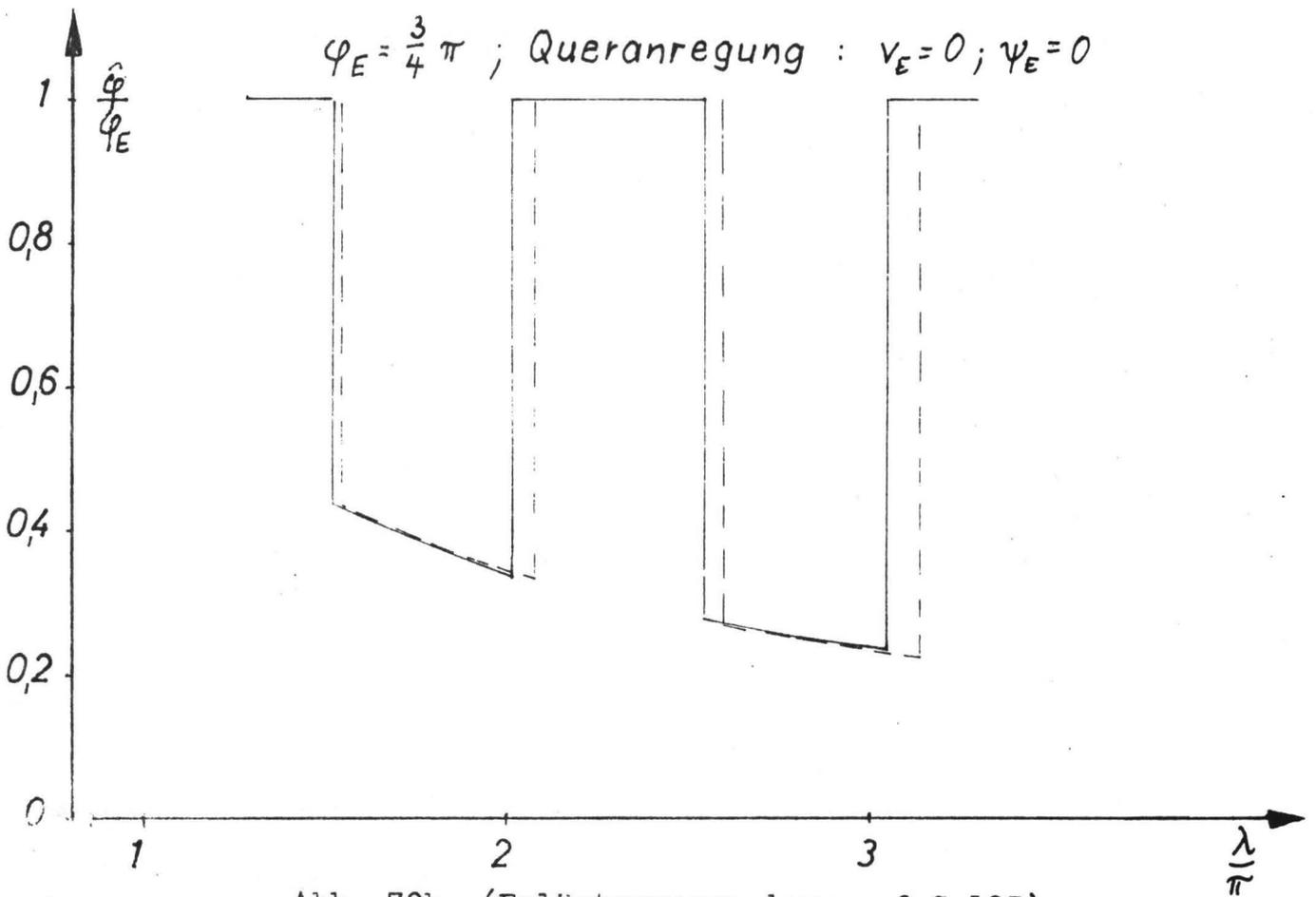


Abb. 70b (Erläuterungen dazu auf S.125)

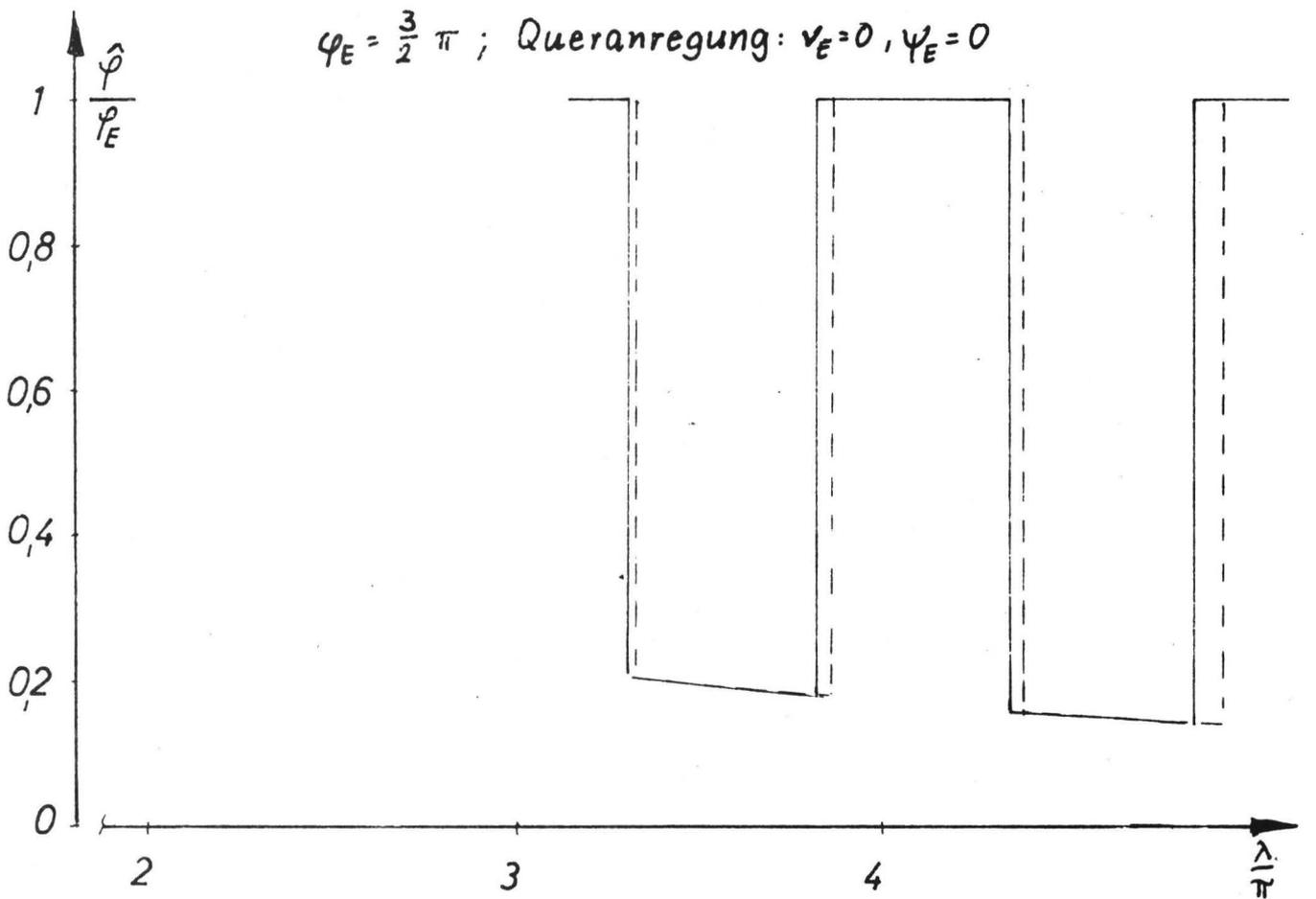
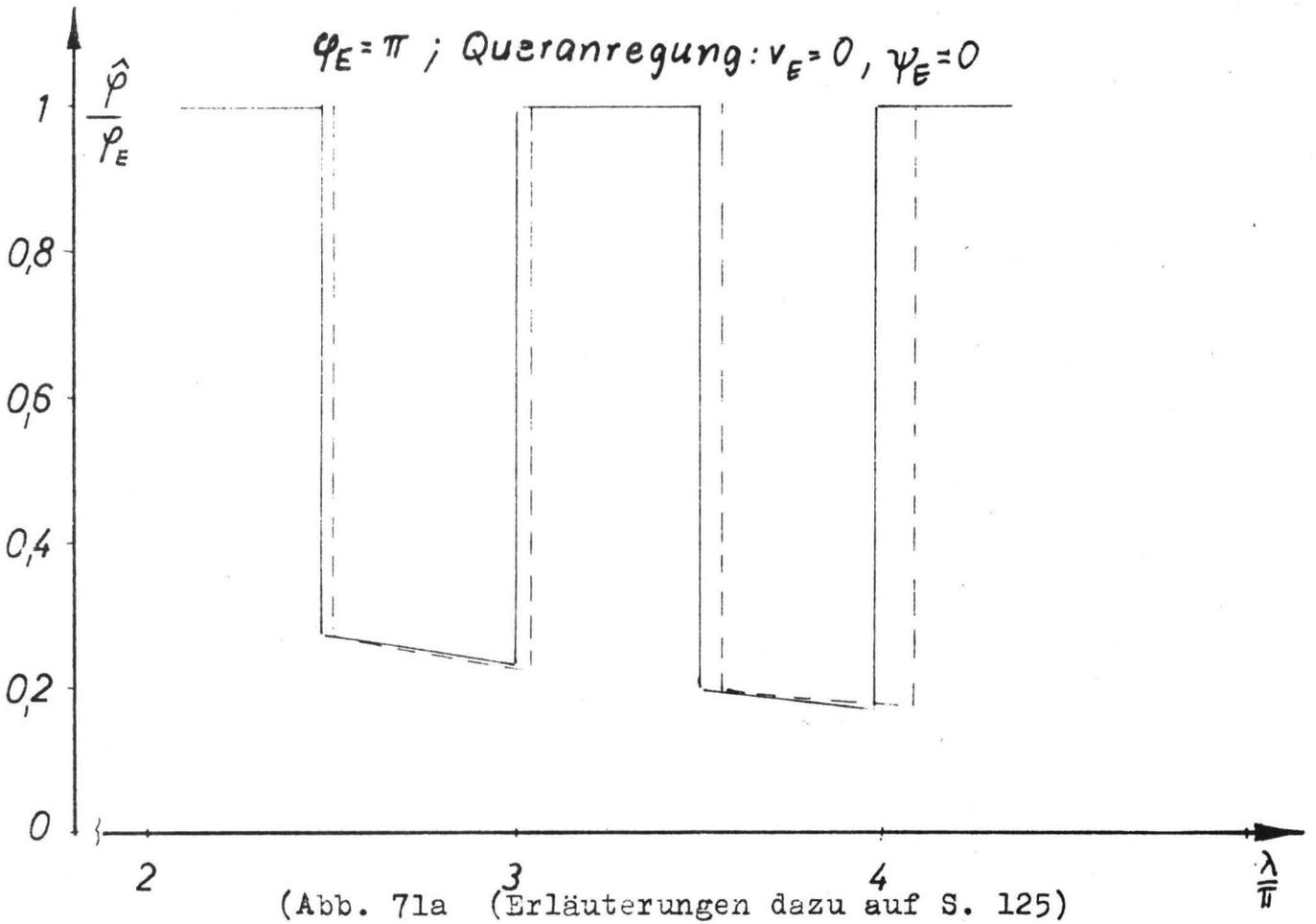


Abb. 71b (Erläuterungen dazu auf S. 125)

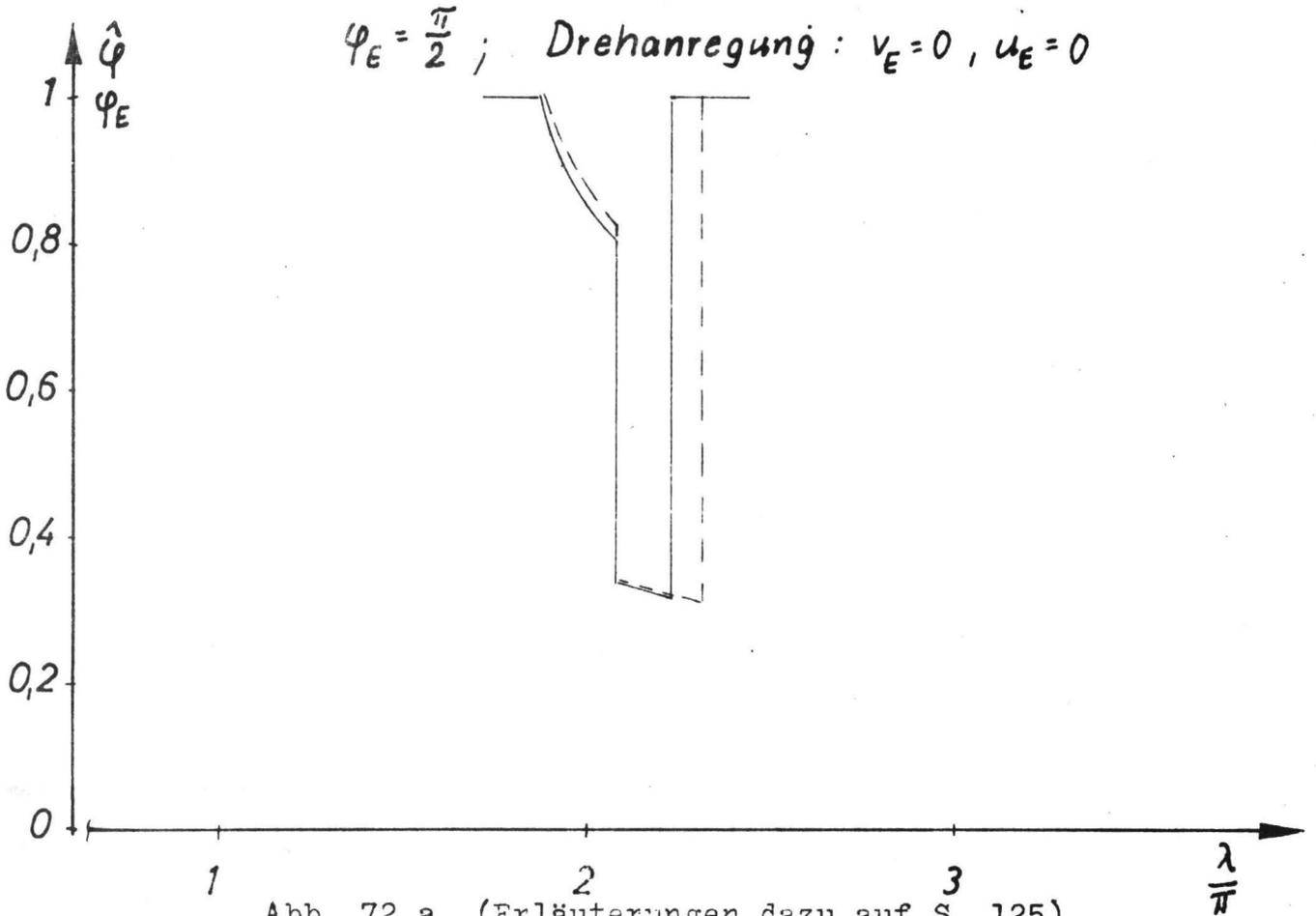


Abb. 72 a (Erläuterungen dazu auf S. 125)

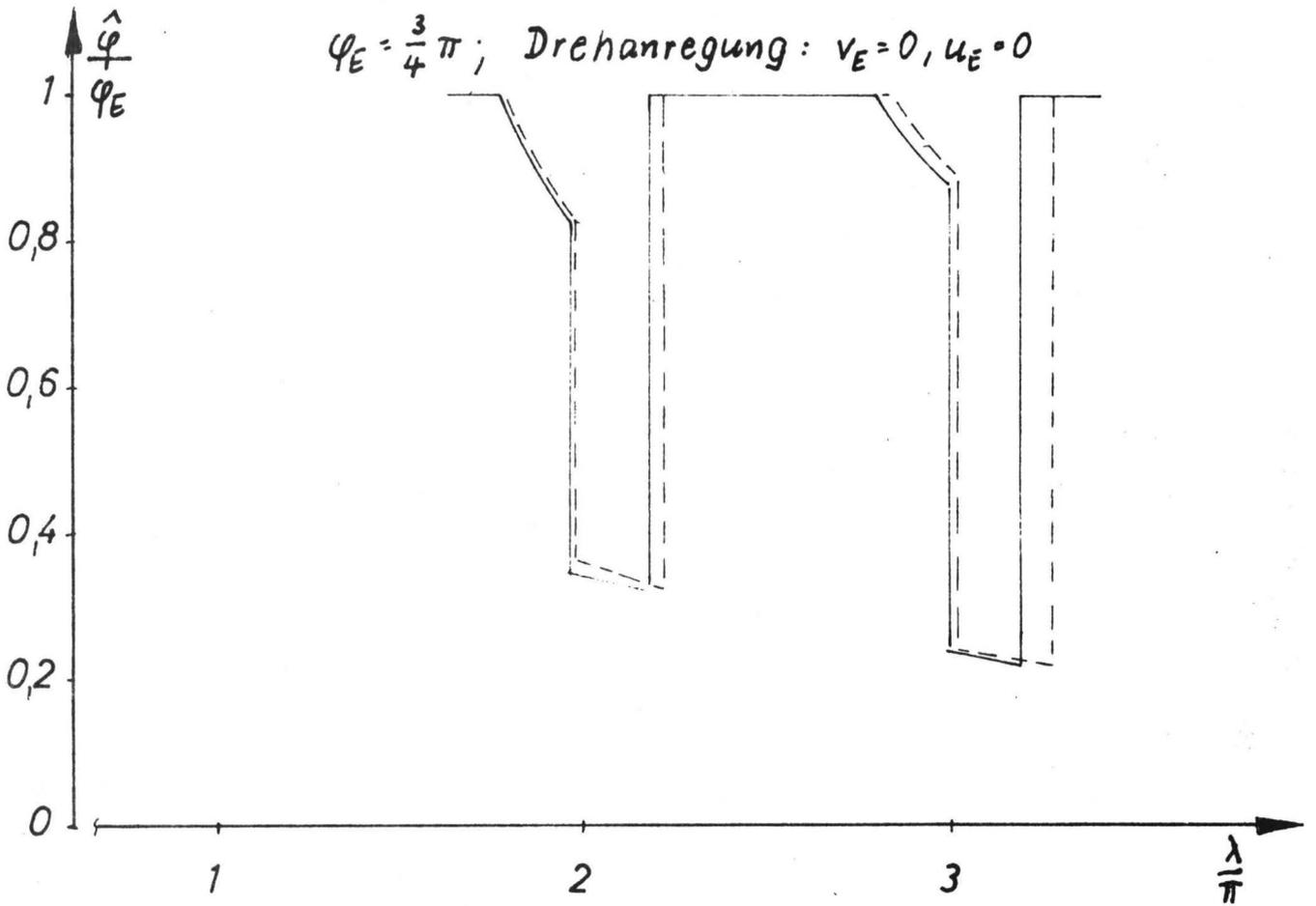
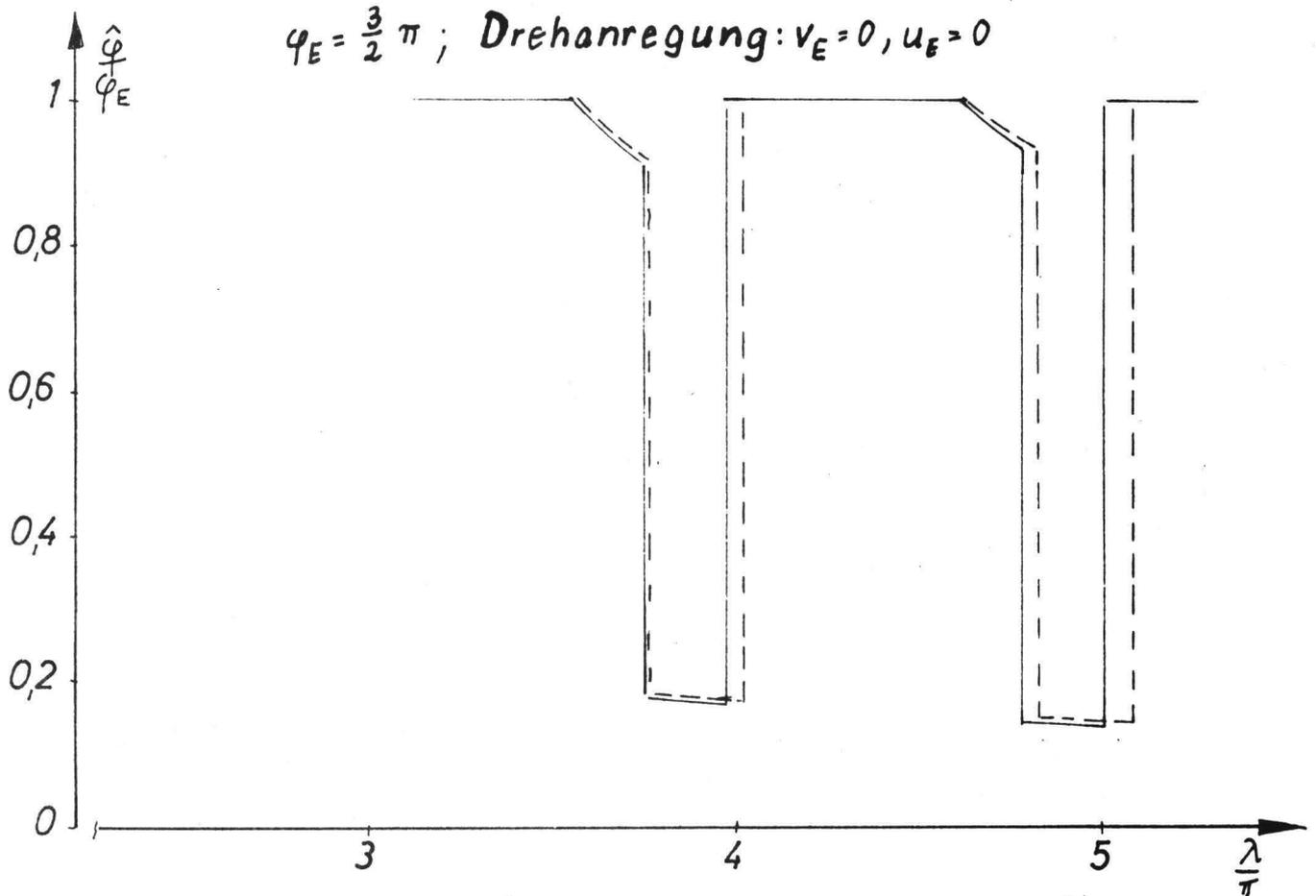
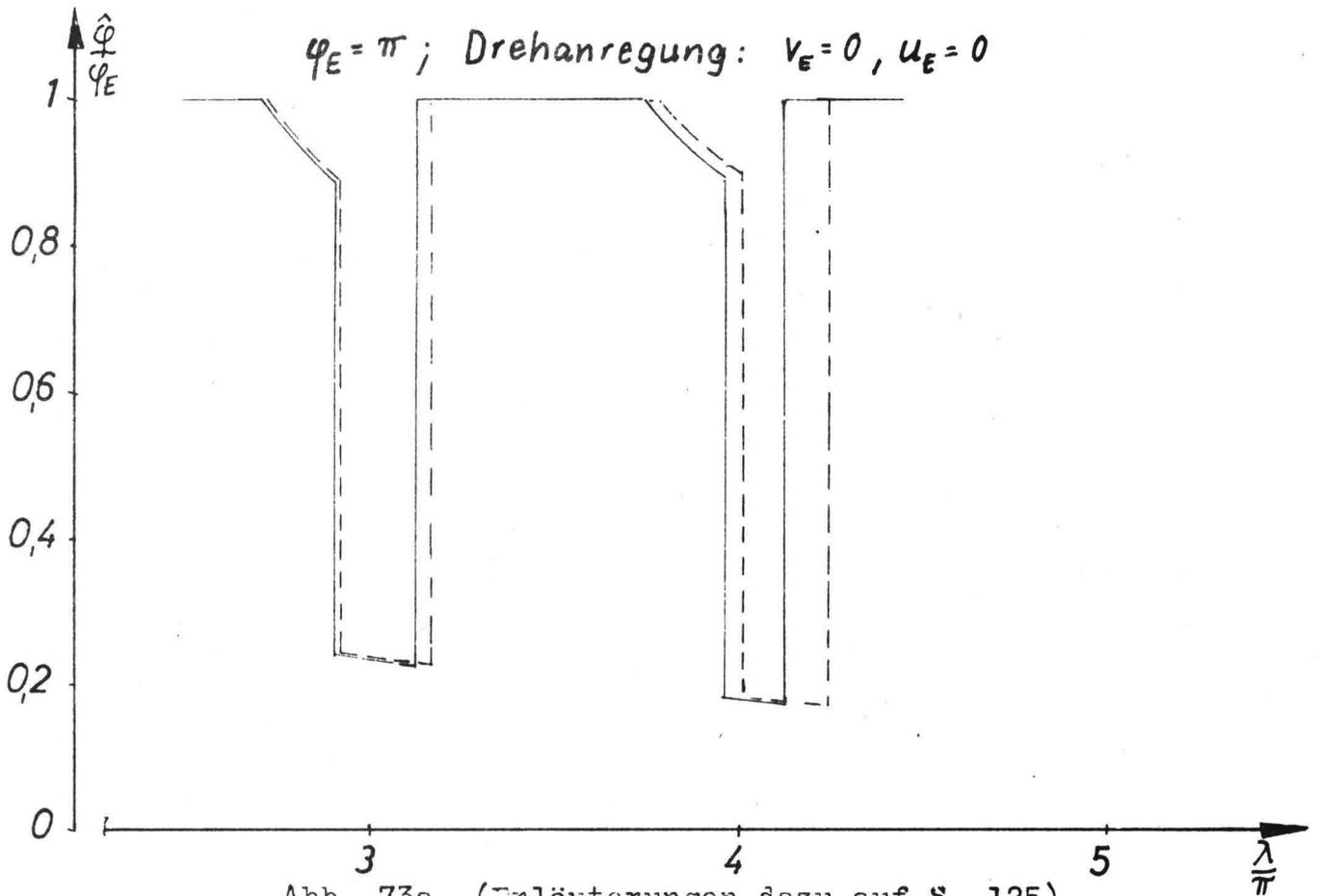


Abb. 72 b (Erläuterungen dazu auf S. 125)



(Erläuterungen dazu auf S.125)

Einseitig eingespannte Stäbe, Längsanregung: $u_E=0, \psi_E=0$

Vergleich: - - - einfache Biegetheorie
— verbesserte Theorie mit $f=1000, \gamma=3.0/1=\sqrt{3}$

— Eigenfrequenzen
nach der verbesserten Theorie

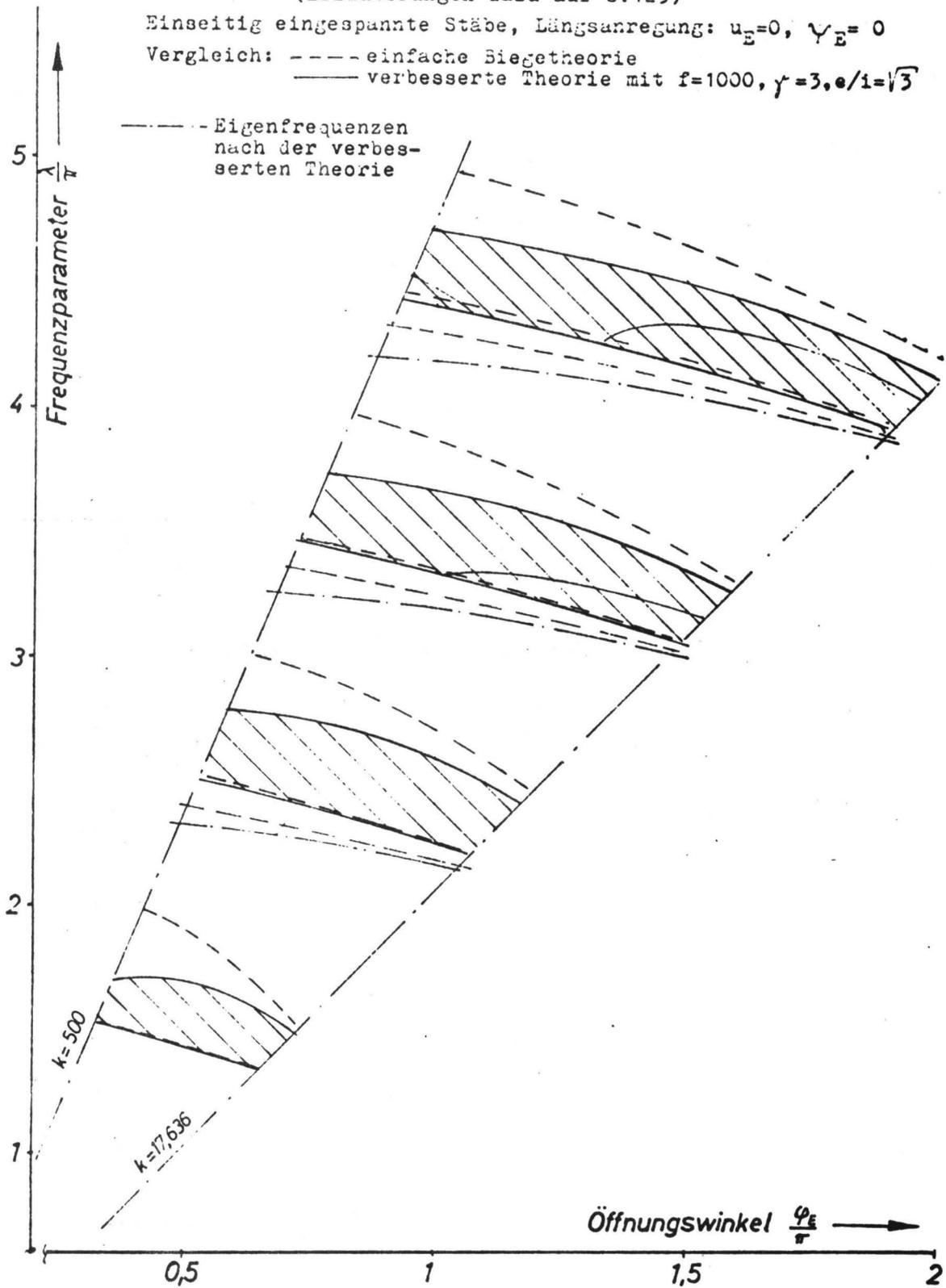


Abb. 75

(Erläuterungen dazu auf S.125)

Einseitig eingespannte Stäbe, Queranregung: $v_E = 0, \psi_E = 0$

Vergleich: - - - einfache Biegetheorie
— verbesserte Theorie mit $f=1000, \gamma=3, e/i=\sqrt{3}$

— Ei genfrequenzen
nach der verbesserten Theorie

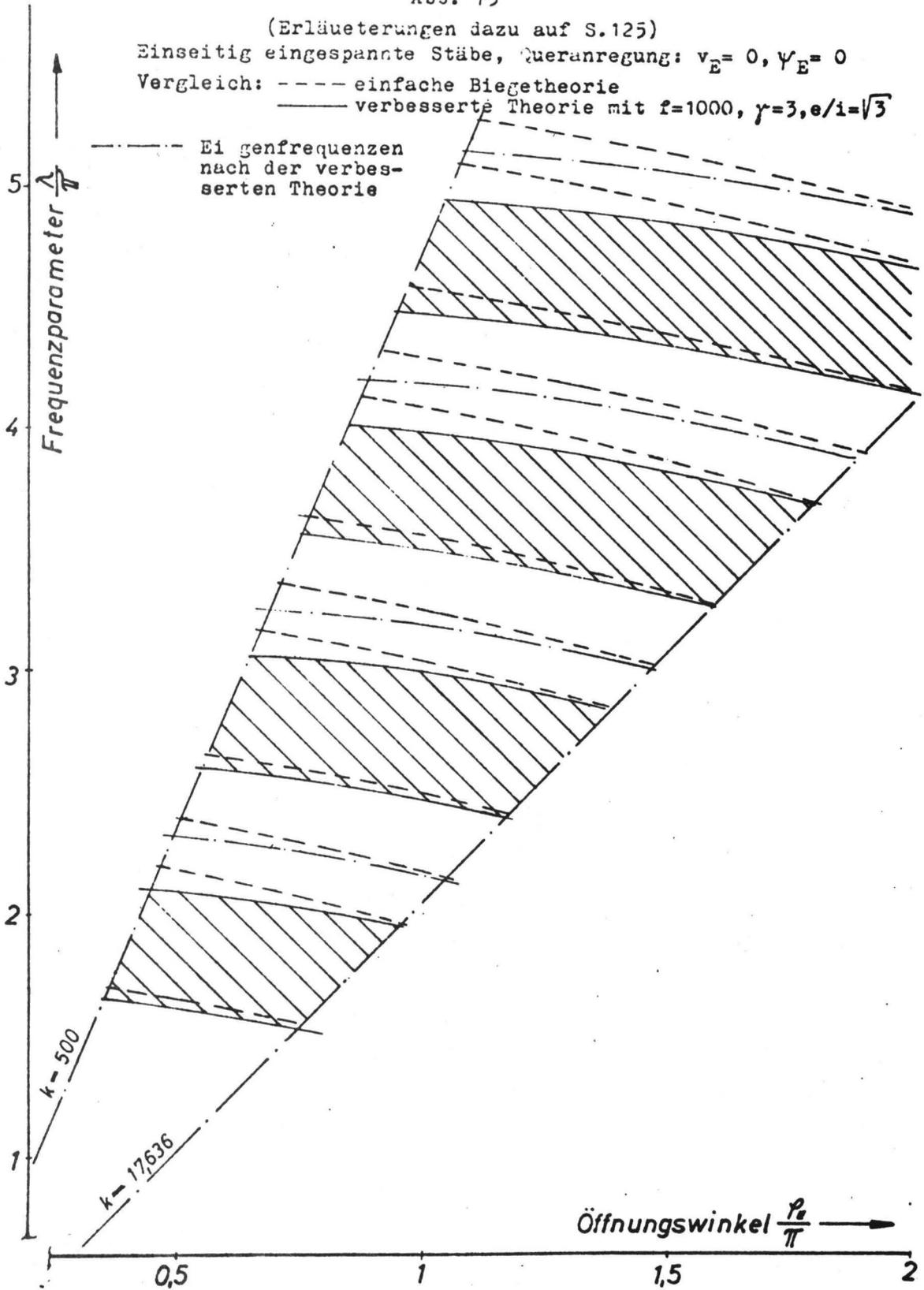
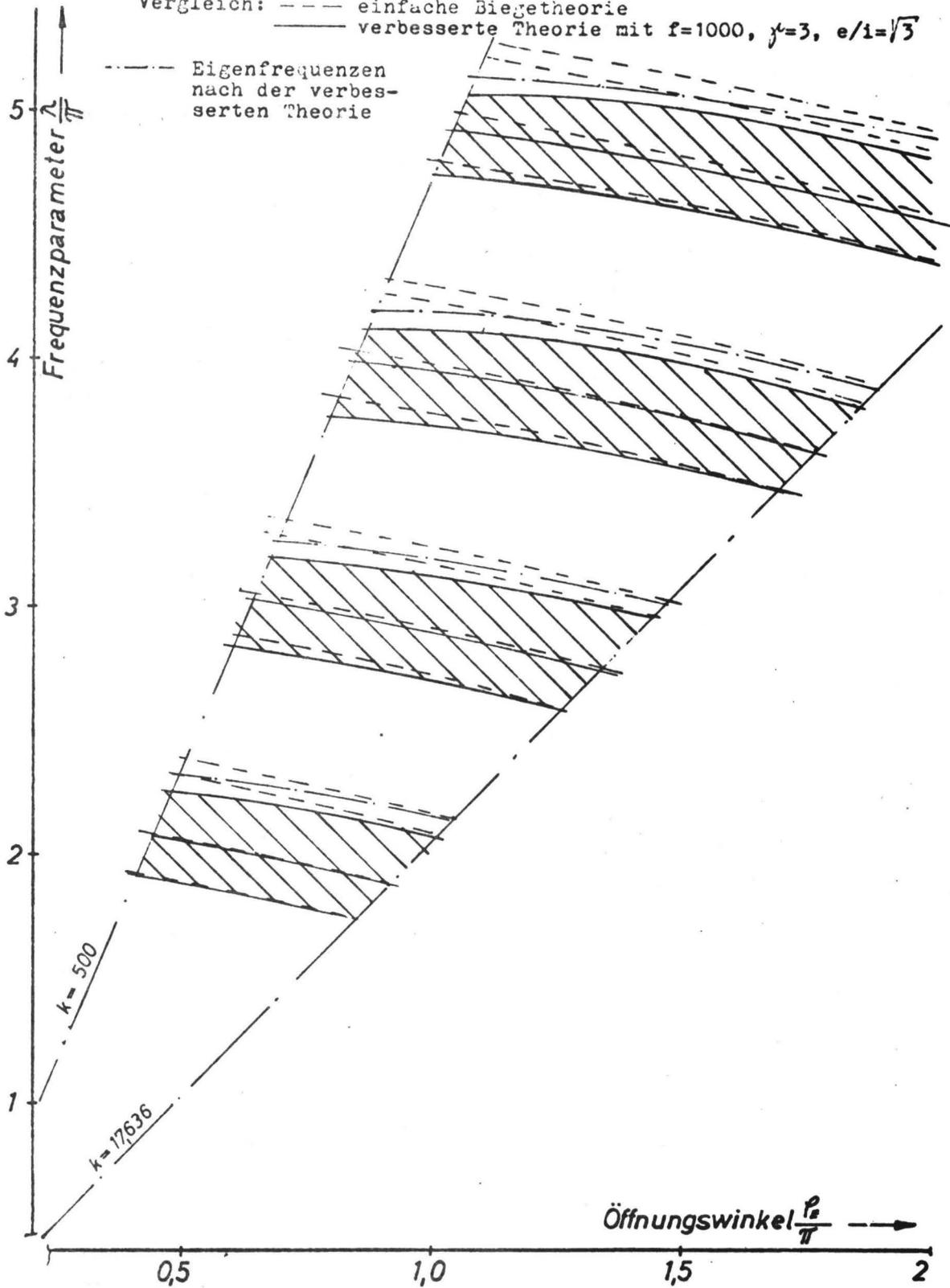


Abb. 76 (Erläuterungen dazu auf S.125)

Einseitig eingespannte Stäbe, Drehanregung: $v_E=0, u_E=0$

Vergleich: --- einfache Biegetheorie
— verbesserte Theorie mit $f=1000, \gamma^k=3, e/i=\sqrt{3}$



5. Experimenteller Teil

Um einen Teil der Rechenergebnisse zu überprüfen, wurden Versuche mit einseitig eingespannten Kreisbogenstäben durchgeführt. Diese Stäbe wurden durch harmonische, translatorische bzw. rotatorische Bewegung ihrer Einspannung so lange zu Schwingungen erregt, bis ein Dauerbruch eintrat. Die Stelle dieses Bruches wurde dann mit der berechneten Stelle der höchsten Beanspruchung verglichen.

5.1 Versuchseinrichtung

Zur Erzeugung einer sinusförmigen translatorischen Bewegung stand eine komplette Schwingungserregeranlage zur Verfügung, die aus einem Frequenzgenerator, einem Leistungsverstärker und einem elektrodynamischen Schwingtisch besteht (siehe Abb. 77). Um möglichst große Amplituden der Stabeinspannung zu erreichen, wurden die Probestäbe (Pos. 4 in Abb. 77) nicht direkt auf die Schwingplatte (Pos. 1) des Erregers gespannt, sondern auf Biegefedern (Pos. 2). Diese bilden, zusammen mit der Masse der Einspannstücke (Pos. 3), ein schwingungsfähiges System. Durch Variation der Dicke, Länge und Anzahl der Federstäbe und der Masse der Einspannstücke wurde die 1. Eigenfrequenz dieses Systems jeweils so abgestimmt, daß sie mit der gewünschten Anregungsfrequenz zusammenfiel. Auf diese Weise konnten verhältnismäßig große translatorische Amplituden der Einspannstelle erreicht werden (etwa 1 mm bei 200 Hz).

Um die Probestäbe auch durch eine Drehbewegung der Einspannung anregen zu können, wurde die in den Abbildungen 79 und 80 gezeigte Versuchsanordnung gebaut. Der Torsionsstab (Pos. 2 in Abb. 79/80) ist an einem Ende eingespannt (Pos. 1) und an drei Stellen zwecks Verminderung unerwünschter Biegeschwingungen in Kugellagern drehbar gelagert. An seinem Ende ist die Einspannvorrichtung (Pos. 5) für die Versuchsstäbe befestigt. Über einen Hebel (Pos. 3) und eine Schubstange (Pos. 4) mit Kreuzfedergelenken wird der Stab von einem elektrodynamischen Schwingungserreger (Pos. 9) in Torsionsschwingungen versetzt. Dadurch führte die Einspannung

der Probestäbe Drehschwingungen aus. Auch hier wurde die Resonanz ausgenutzt, um möglichst große Winkelamplituden zu erzeugen. Durch Veränderung der Endmasse (Pos. 5 in Abb. 79) und der Stablänge konnte die erste Eigenfrequenz des schwingungsfähigen Systems, das aus dem Torsionsstab und der Endmasse gebildet wird, jeweils so eingerichtet werden, daß sie mit der gewünschten Anregungsfrequenz übereinstimmte.

Die Ausnutzung der Resonanz des schwingungsfähigen Einspannsystems ist nicht nur wegen der großen Amplituden vorteilhaft, sondern sie gewährleistet gleichzeitig auch, daß die in der elektrodynamischen Anregung enthaltenen Störfrequenzen mechanisch weggefiltert werden und die Bewegung der Einspannung sinusförmig verläuft.

Da die Frequenzskala der kontinuierlich durchstimmbaren Frequenzgeneratoren nicht sehr genau ist, wurde bei beiden Versuchseinrichtungen die Anregungsfrequenz mit einem Frequenzmeßgerät gemessen (siehe auch die Schemaskizze Abb. 78).

5.2 Werkstoffe der Versuchsstäbe

Die Stäbe sollten aus einem Werkstoff bestehen, der bis zum Bruch dem Hookeschen Gesetz gehorcht und bei dem sich Dauerbrüche mit möglichst geringen Anregungskräften erzeugen lassen.

Für die Versuche mit translatorischer Anregung der Einspannstelle wurden Stäbe aus Grauguß verwendet. Auf der Drehbank wurden Ringe mit einem Rechteckquerschnitt von 5 x 10 mm und einem mittleren Durchmesser von 210 mm hergestellt, und aus diesen wurden die gewünschten Segmente herausgesägt.

Bei der Versuchsanordnung für rotatorische Anregung der Einspannung reichten die erzielbaren Winkelamplituden nicht aus, um bei Graugußstäben Dauerbrüche zu erzeugen. Daher wurden Stäbe aus Hartgips verwendet, die in einer Metallform mit Silikonkautschuk-Auskleidung gegossen worden waren.

5.3 Durchführung der Versuche

Aus den berechneten Diagrammen 22 bis 44 wurden für verschiedene Öffnungswinkel Frequenzparameter ausgewählt, bei denen Dauerbrüche außerhalb der Einspannstelle zu erwarten sind.

Von jedem Versuchsstab wurde zunächst bei möglichst starrer Einspannung durch Aufsuchen der Resonanzüberhöhung diejenige Eigenfrequenz $f_{e, \text{Stab}}$ gemessen, die der geplanten Anregungsfrequenz am nächsten war. Mit dem theoretisch berechneten Eigenwert k_e wurde die Anregungsfrequenz

$$f_{\text{geplant}} = \sqrt{\frac{k_{\text{geplant}}}{k_e}} \cdot f_{e, \text{Stab}}$$

ermittelt. Dann wurde versucht, die Eigenfrequenz des Einspannsystems so abzustimmen, daß sie möglichst dicht an f_{geplant} lag. Bei der tatsächlichen Eigenfrequenz des Einspannsystems, die mit f_{gemessen} bezeichnet wird, wurde nun der Dauerschwingversuch bis zum Bruch des Versuchsstabes durchgeführt. Der wirklich vorliegende Frequenzparameter der erzwungenen Schwingung ergibt sich dann aus der Gleichung

$$k = k_e \left(\frac{f_{\text{gemessen}}}{f_{e, \text{Stab}}} \right)^2.$$

Die Abbildungen 81 bis 94 zeigen einige Versuchsstäbe mit Dauerbrüchen.

Der Winkel φ_{Br} zwischen dem freien Ende und der Bruchstelle wurde mit $\pm 0,5^\circ$ Genauigkeit mit einem Winkelmesser gemessen. Um nun die experimentell gefundenen Bruchstellen mit den berechneten Stellen der höchsten Beanspruchung zu vergleichen, wurden die Werte φ_{Br}/φ_E in die zugehörigen Diagramme eingetragen, die $\hat{\varphi}/\varphi_E$ in Abhängigkeit vom Frequenzparameter λ/π darstellen.

Die Abbildungen 95 bis 100 zeigen, daß zwischen den berechneten Werten und den Versuchsergebnissen eine befriedigende Übereinstimmung besteht.

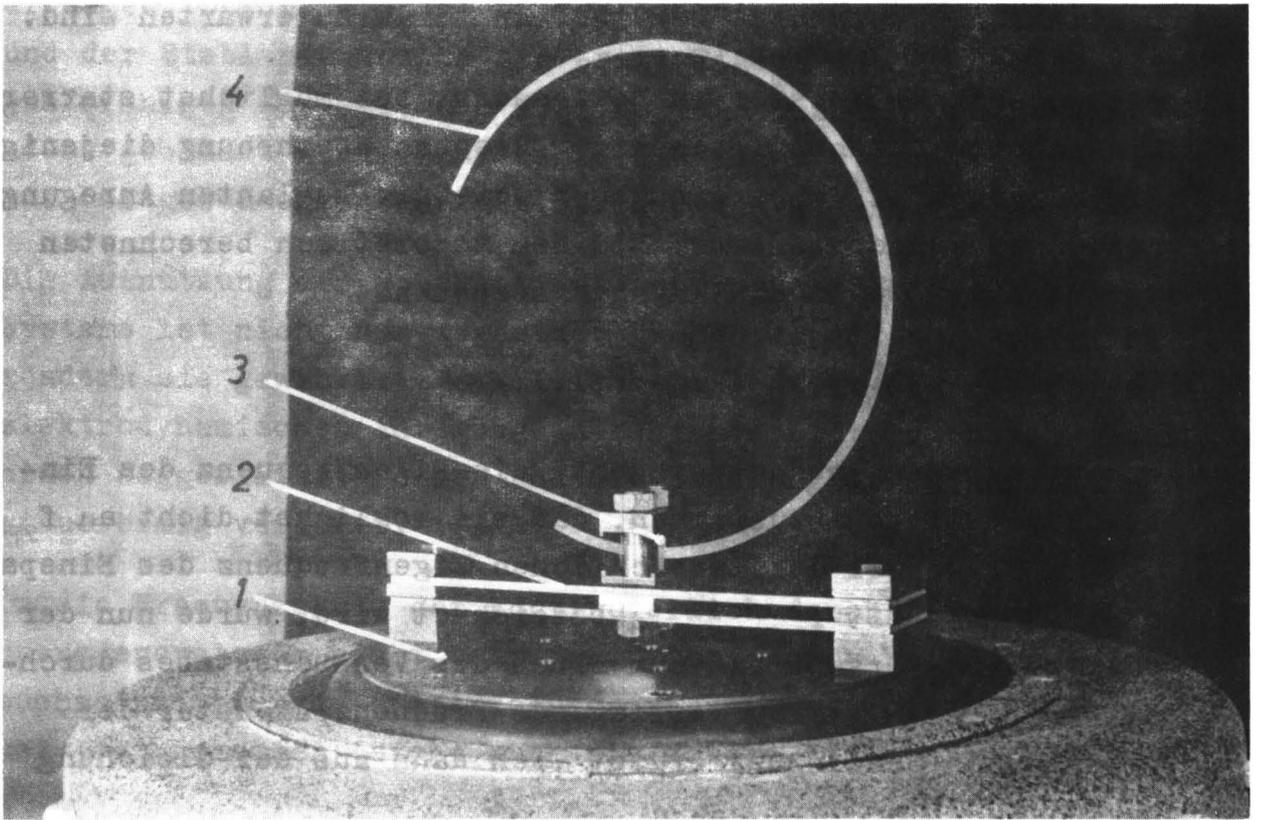


Abb. 77

- 1 Schwingplatte des elektrodynamischen Schwingungserregers C 10 der Firma MB Electronics, New Haven, Connecticut, USA
- 2 Biegefedern aus gehärtetem Flachstahl, auf der Schwingplatte festgespannt
- 3 Einspannung des Versuchsstabes
- 4 Versuchsstab aus Grauguß

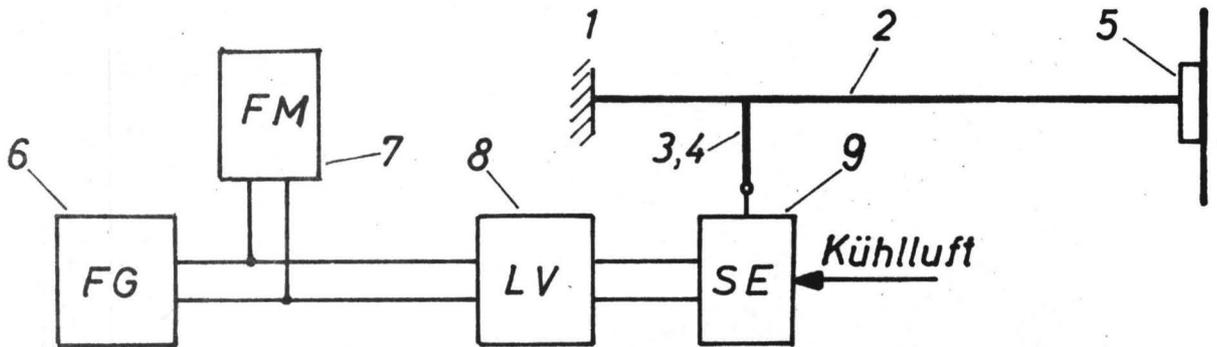


Abb. 78

Schematische Skizze der Versuchseinrichtung zur Erzeugung von Drehschwingungen

- 1 Feste Einspannung
- 2 Torsionsstab
- 3 Hebel, mit Stab 2 fest verbunden
- 4 Schubstange zwischen dem Stößel des Schwingungserregers 9 und dem Hebel 3
- 5 Einspannung für Versuchsstäbe (angeschraubter Winkelstahl dient als träge Masse zur Resonanzabstimmung)
- 6 Frequenzgenerator Typ 111 der Firma Wavetek, San Diego, Calif., USA
- 7 Frequenzmesser der Firma General Radio Company, West Concord, Mass., USA
- 8 Leistungsverstärker Typ LV 412 der Firma Fey, München
- 9 Elektrodynamischer Schwingungserreger Typ V50 Mk1 der Firma Pye-Ling, Royston, England

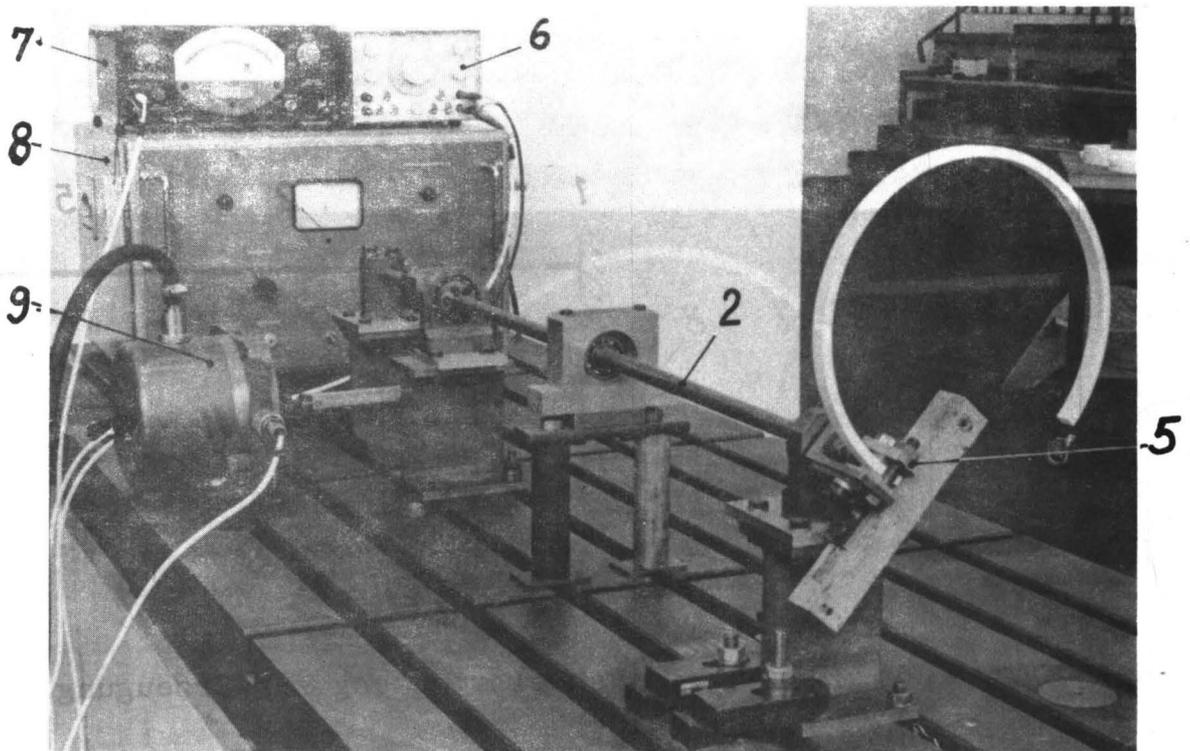


Abb. 79

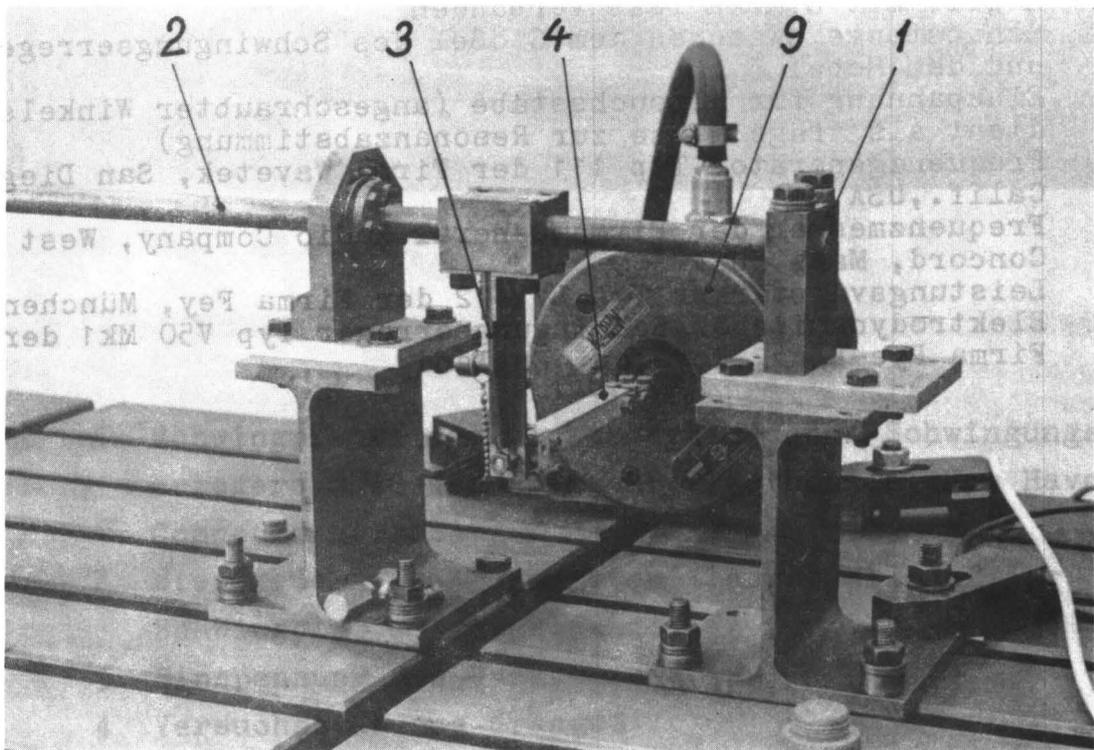


Abb. 80

Abb. 79 und 80: Versuchseinrichtung zur Erzeugung von Drehschwingungen. Erläuterungen dazu unter Abb. 78.

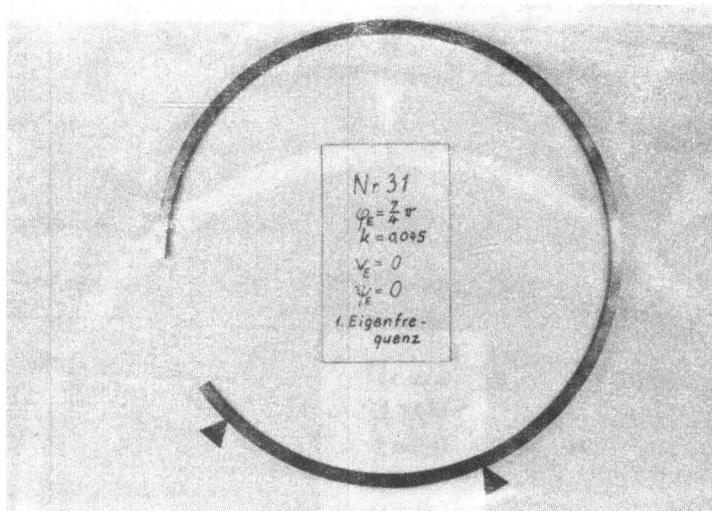


Abb. 81: Anregung mit der 1. Eigenfrequenz

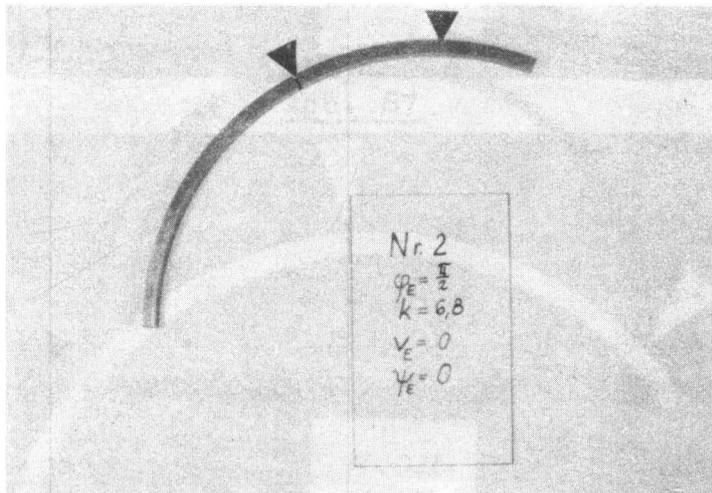


Abb. 82: Anregung zwischen der 1. u. 2. Eigenfrequenz

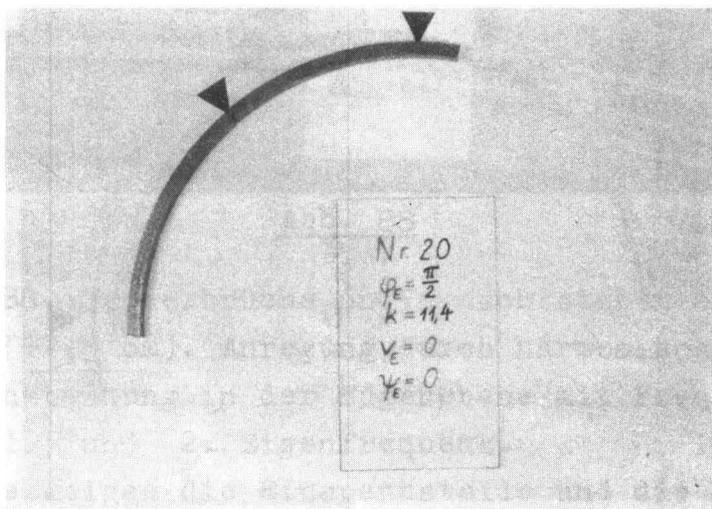


Abb. 83: Anregung zwischen der 1. u. 2. Eigenfrequenz

Abb. 81 - 83 : Dauerbrüche an Versuchsstäben aus Grauguß (Radius $a = 10,5$ cm). Anregung durch harmonische Radialbewegung der Einspannung. Die Dreiecke zeigen die Einspannstelle und die Bruchstelle an.

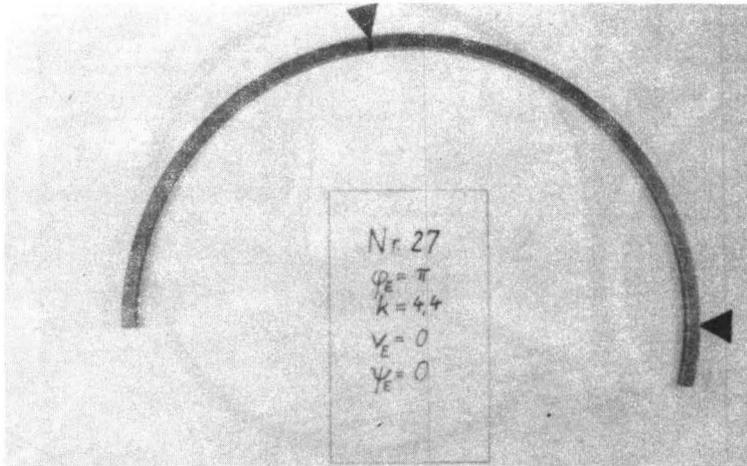


Abb. 84

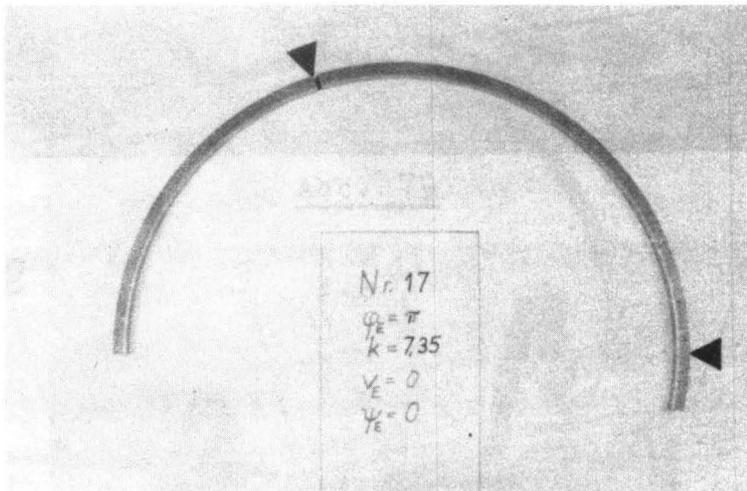


Abb. 85

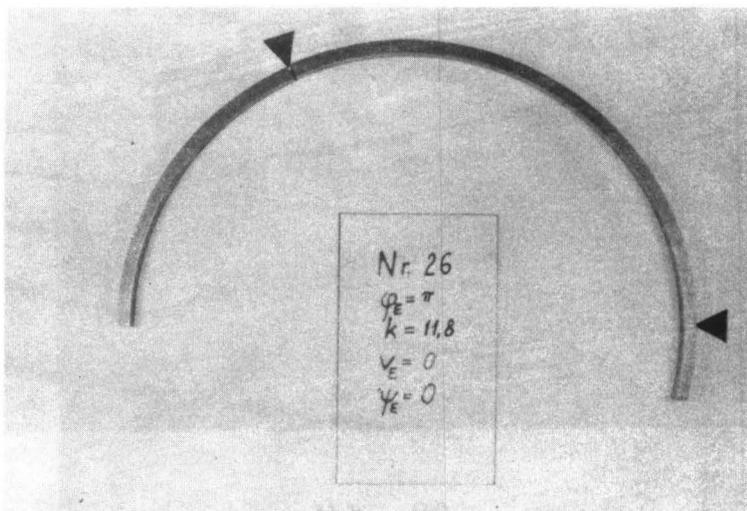


Abb. 86

Abb. 84 - 86 : Dauerbrüche an Versuchsstäben aus Grauguß (Radius $a = 10,5$ cm), Anregung durch harmonische Radialbewegung der Einspannung mit Frequenzen zwischen der 2. und 3. Eigenfrequenz. Die Dreiecke zeigen die Einspannstelle und die Bruchstelle an.

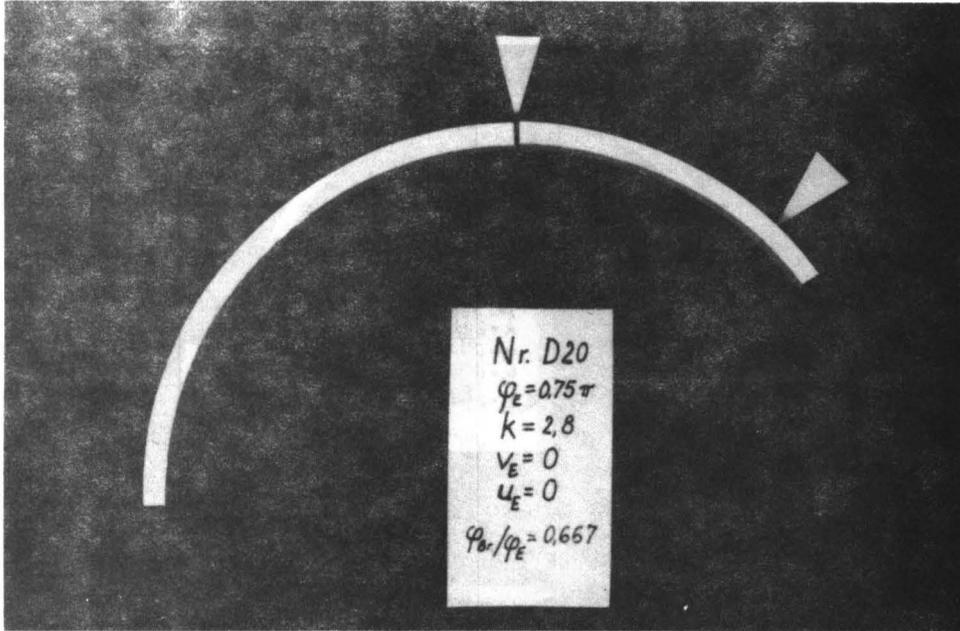


Abb. 87

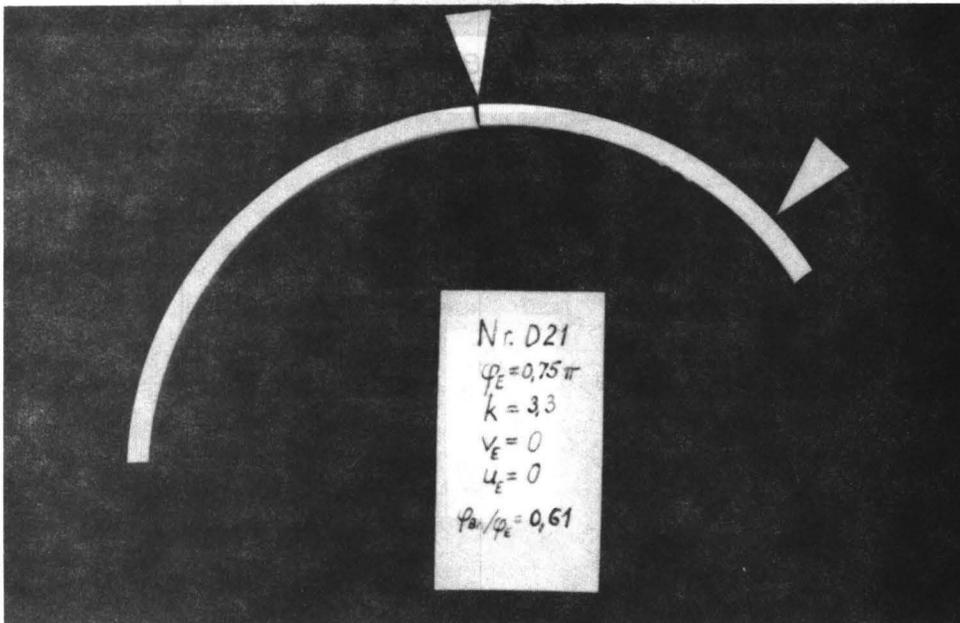


Abb. 88

Abb. 87 u. 88 : Dauerbrüche an Versuchsstäben aus Hartgips (Radius $a = 12,5$ cm). Anregung durch harmonische Drehbewegung der Einspannung in der Bogenebene mit Frequenzen zwischen der 1. und 2. Eigenfrequenz. Die Dreiecke zeigen die Einspannstelle und die Bruchstelle an.

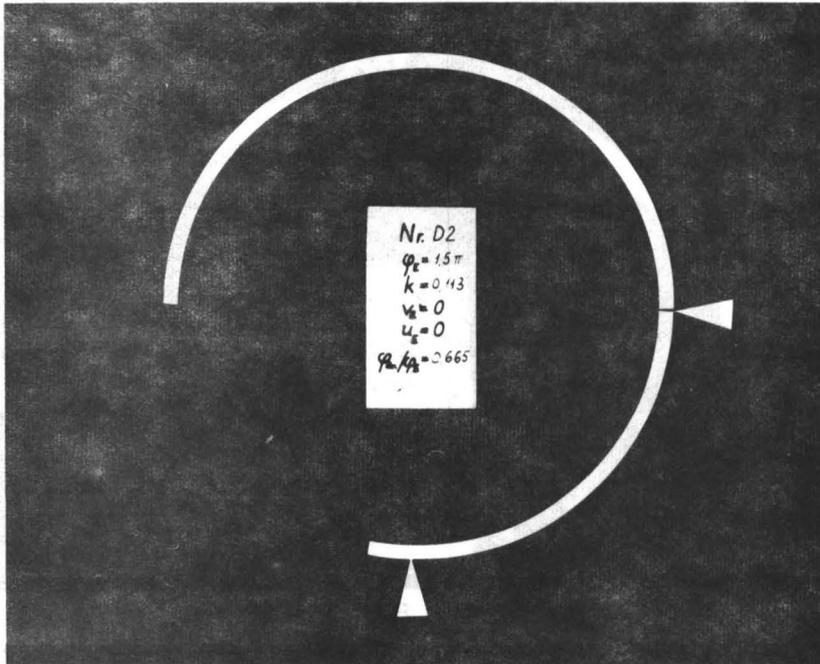


Abb. 89

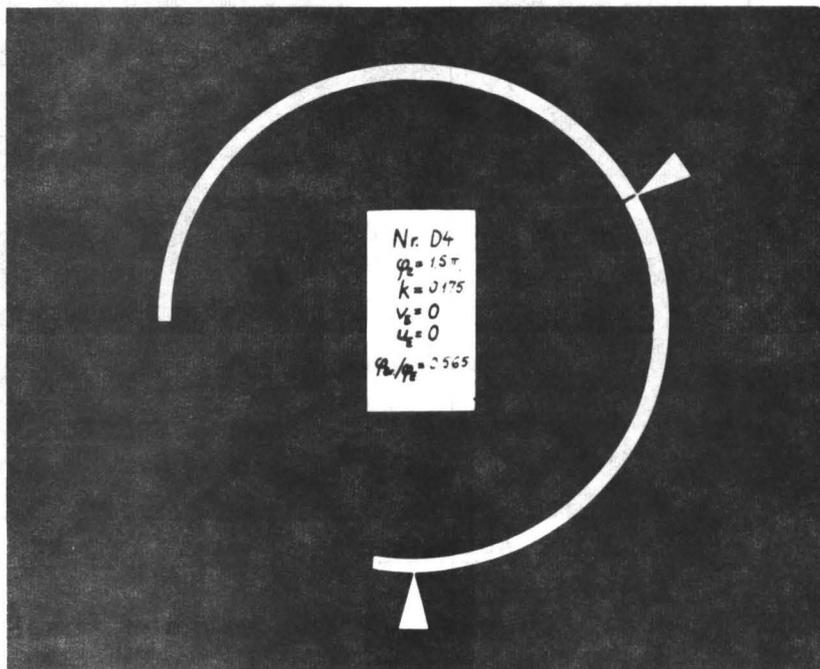


Abb. 90

Abb. 89 u. 90 : Dauerbrüche an Versuchsstäben aus Hartgips (Radius $a = 12,5$ cm). Anregung durch harmonische Drehbewegung der Einspannung in der Bogenebene mit Frequenzen zwischen der 1. und 2. Eigenfrequenz. Die Dreiecke zeigen die Einspannstelle und die Bruchstelle an.

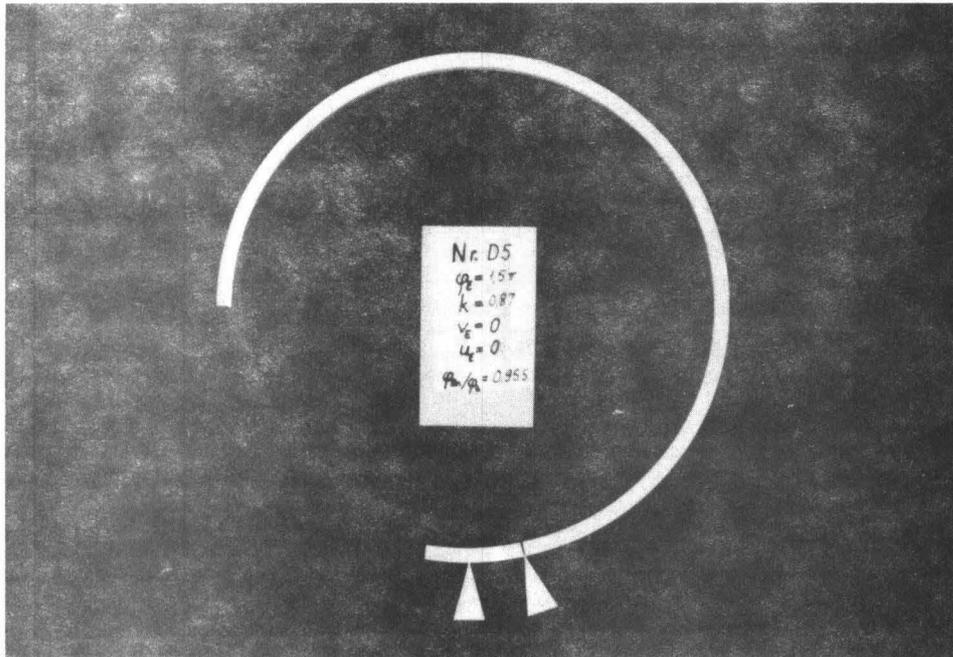


Abb. 91

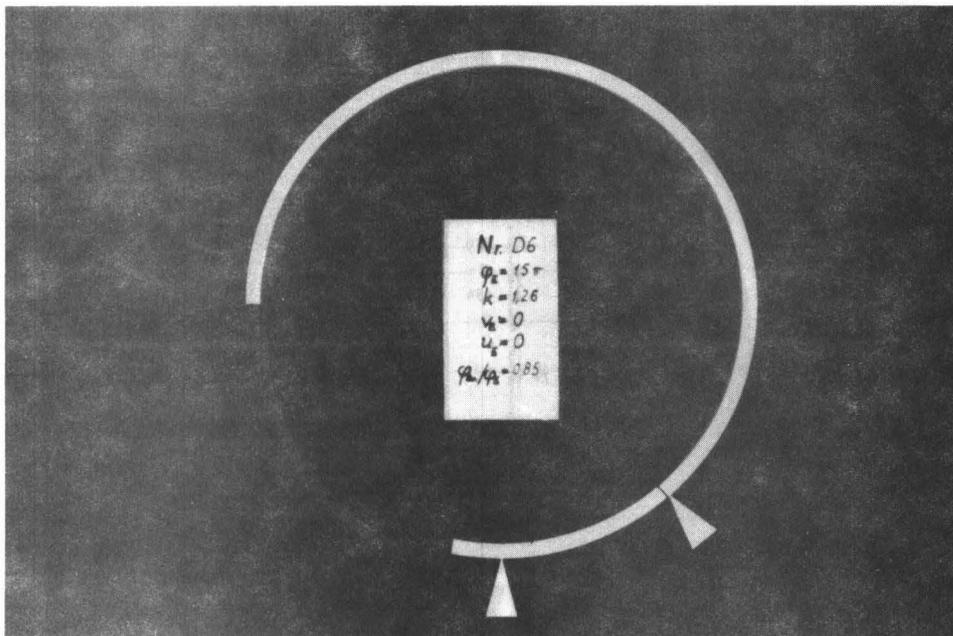


Abb. 92

Abb. 91 u. 92 : Dauerbrüche an Versuchsstäben aus Hartgips (Radius $a = 12,5$ cm). Anregung durch harmonische Drehbewegung der Einspannung in der Bogenebene mit Frequenzen zwischen der 2. und 3. Eigenfrequenz. Die Dreiecke zeigen die Einspannstelle und die Bruchstelle an.

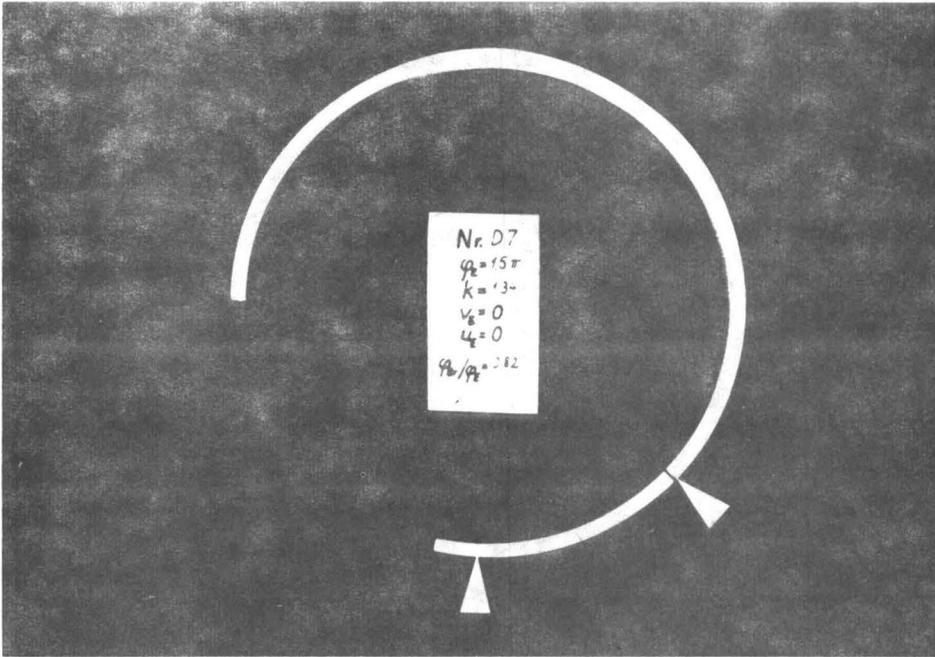


Abb. 93

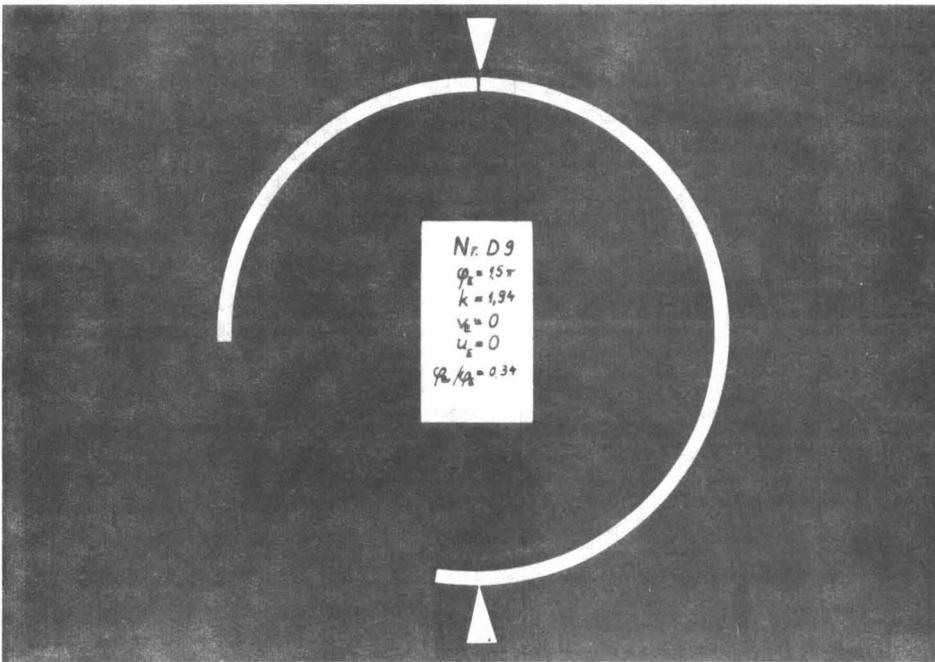


Abb. 94

Abb. 93 u. 94: Dauerbrüche an Versuchsstäben aus Hartgips (Radius $a = 12,5$ cm). Anregung durch harmonische Drehbewegung der Einspannung in der Bogenebene mit Frequenzen zwischen der 2. und 3. Eigenfrequenz. Die Dreiecke zeigen die Einspannstelle und die Bruchstelle an.

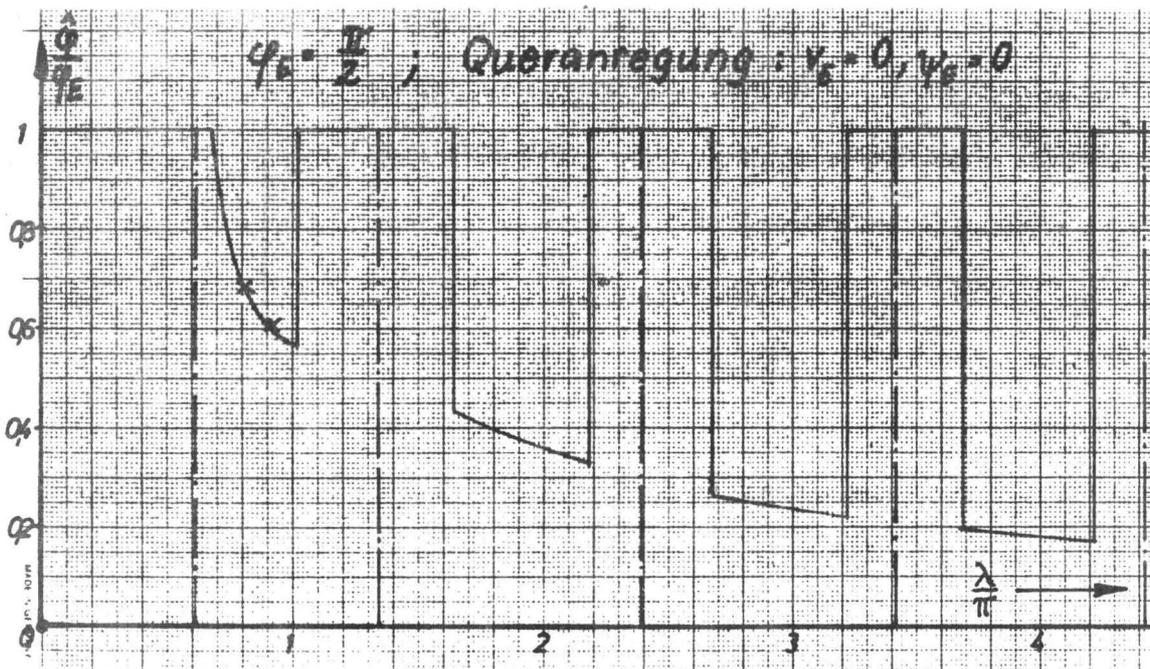


Abb. 95

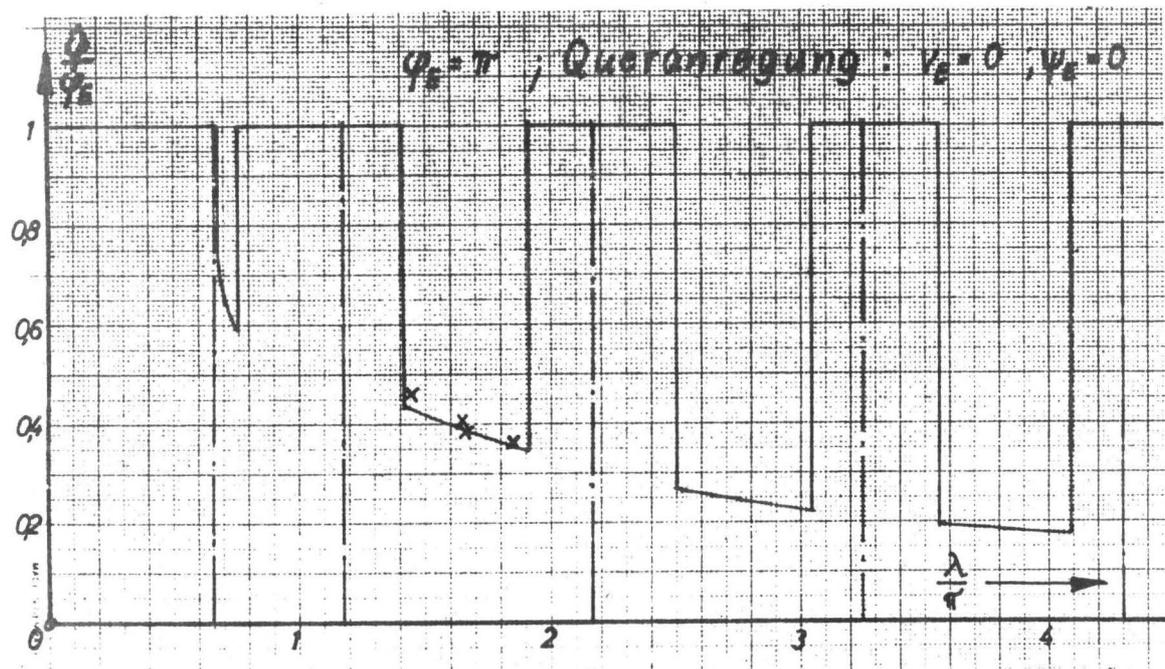


Abb. 96

Abb. 95 und 96: Vergleich der experimentell gefundenen Bruchstellen (als Kreuze eingezeichnet) mit den berechneten Stellen der höchsten Beanspruchung.

Einseitig eingespannte Versuchsstäbe aus Grauguß, Anregung durch harmonische Radialbewegung der Einspannung.

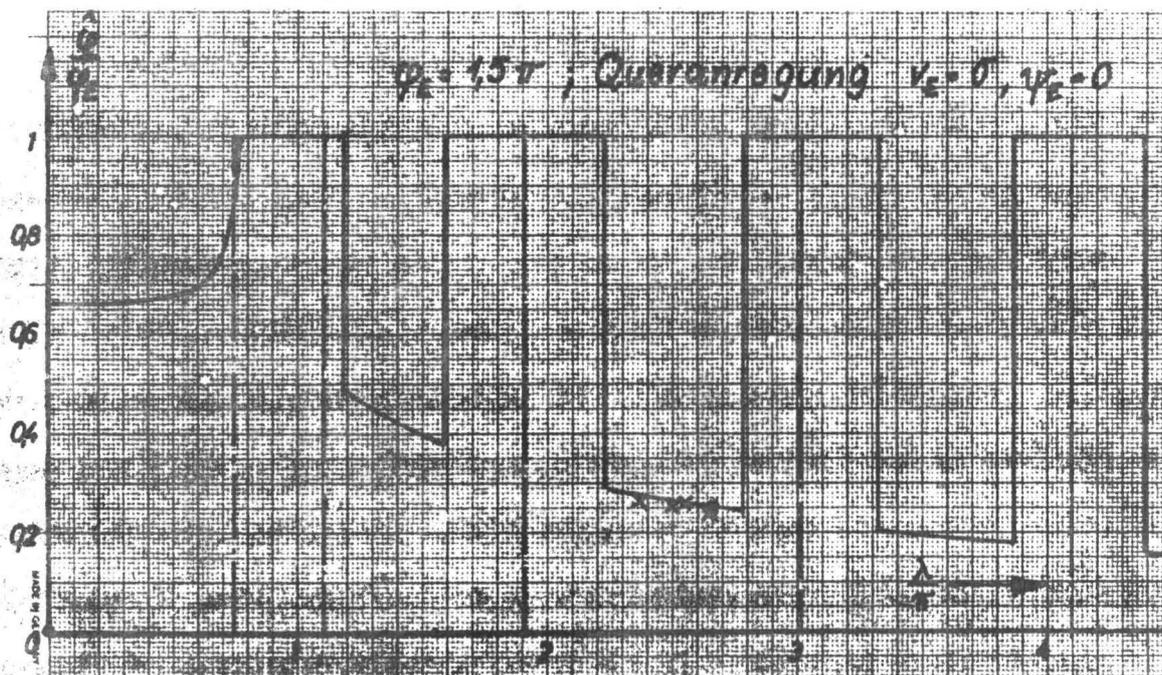


Abb. 97: Vergleich der experimentell gefundenen Bruchstellen (als Kreuze eingezeichnet) mit den berechneten Stellen der höchsten Beanspruchung.

Einseitig eingespannte Versuchsstäbe aus Grauguß, Anregung durch harmonische Radialbewegung der Einspannung.

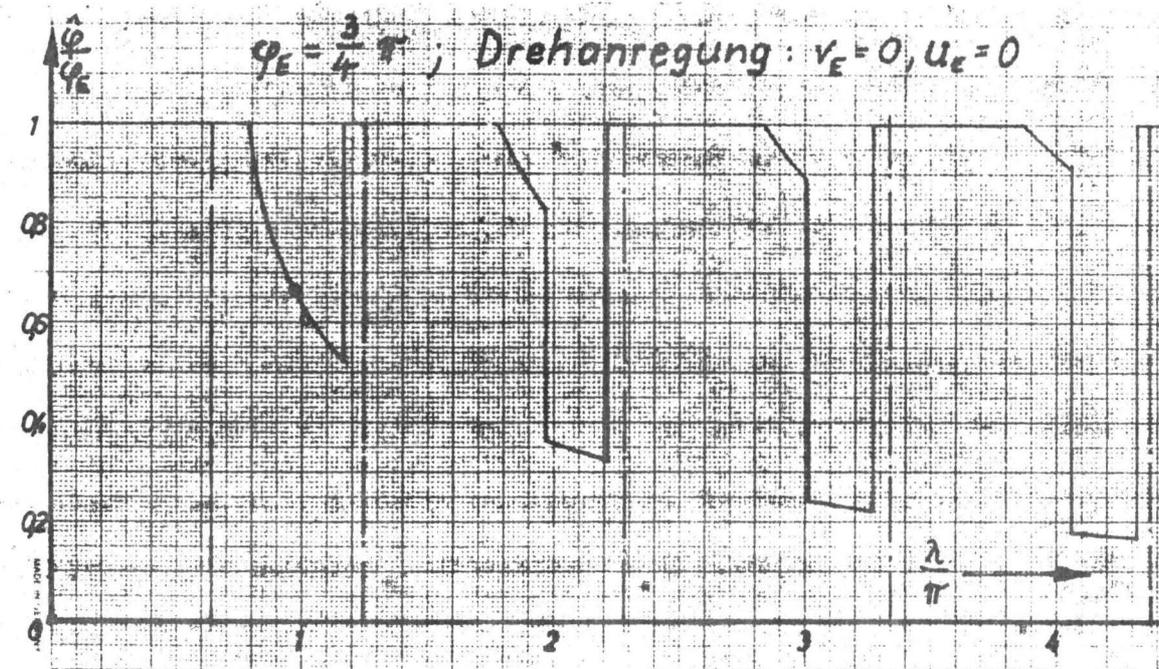


Abb. 98: Vergleich der experimentell gefundenen Bruchstellen (als Kreise eingezeichnet) mit den berechneten Stellen der höchsten Beanspruchung.

Einseitig eingespannte Versuchsstäbe aus Hartgips, Anregung durch harmonische Drehbewegung der Einspannung.

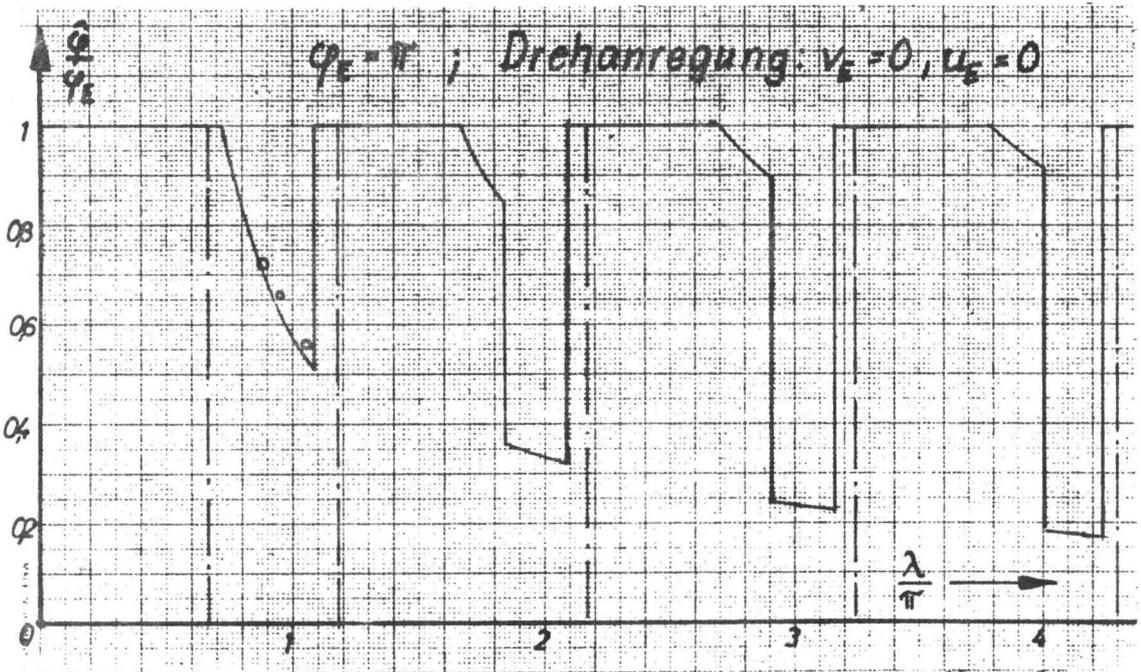


Abb. 99

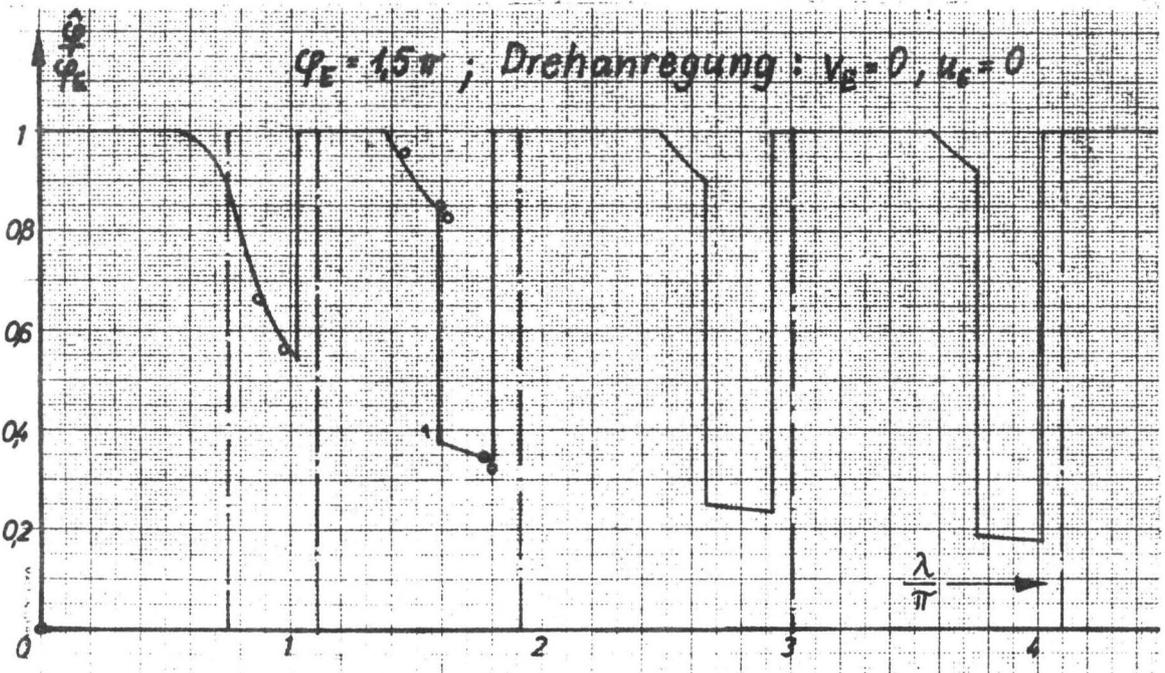


Abb. 100

Abb. 99 und 100: Vergleich der experimentell gefundenen Bruchstellen (als Kreise eingezeichnet) mit den berechneten Stellen der höchsten Beanspruchung.

Einseitig eingespannte Versuchsstäbe aus Hartgips, Anregung durch harmonische Drehbewegung der Einspannung.

